Conformal Field Theory

共形場理論

江口　徹 Tohru Eguchi
菅原祐二 Yuji Sugawara

岩波書店

共形場理論

共形場理論

Conformal Field Theory

江口 徹
Tohru Eguchi

菅原祐二
Yuji Sugawara

岩波書店

まえがき

相転移の理論の研究においては，系の臨界点付近でスケール不変性を持つ理論を考えるのが有効なことは広く知られている．スケール不変な理論では，長さのスケールを一様に変化させても物理系の性質は不変であり，たとえば相関関数などは簡単なスケーリングのふるまいを示す．

1970 年頃にポリアコフ(Polyakov)は，2 次元の場の量子論に関してスケール不変性よりも強い共形不変性の仮説を導入した [20]．2 次元のシステムが一様等方で相互作用が局所的な場合，スケール不変性は共形不変性に持ち上がることが知られている．したがって，スケール不変な理論の代わりに共形不変な理論を考えることが有効となる．このような性質を持った場の量子論を**共形場理論**と呼ぶ．本書の中で詳しく解説するように，2 次元空間においては，共形変換は無限個の生成子を持ち，「ビラソロ代数」と呼ばれる無限次元の代数を形成する．ビラソロ代数は弦理論の研究を通じて新しく発見されたリー代数である．回転群の表現が素粒子のスピンの値を決めるように，ビラソロ代数の表現が臨界点での種々の臨界指数や，弦理論に現れる基本粒子の質量を決める．

1980 年代初めに現れたベラビン(Belavin)，ポリアコフ，ザモロジコフ(Zamolodchikov)の論文 [21] は，ビラソロ代数の中心電荷や共形次元などの物理的な意味を明らかにし，知られていた多くの臨界現象がビラソロ代数の異なる表現と 1 対 1 に対応することを示してその後の著しい発展の基礎を作った．2 次元の臨界現象は共形場の理論によってほぼ完全に解かれたと言ってよいであろう．

一方，弦理論もその数学的な基礎は，世界面上で定義された共形場理論にあるが，この場合は超対称性を持つように拡張された共形場の理論が活躍することが多い．特に，カラビ・ヤウ多様体上にコンパクト化された弦理論の場合は，$\mathcal{N}=2$ 超共形代数が，また $K3$ 曲面上にコンパクト化された弦理論の研究には，$\mathcal{N}=4$ 超共形代数の表現論が重要となる．

1990 年代の後半以降，弦理論の新しい発展に伴い，「AdS/CFT 対応」に代

表される，いわゆる「ゲージ・重力対応」が注目されるようになり，ターゲット時空やブレーンの世界体積上の共形場理論の重要度が増している．特に本書で解説する2次元の共形場理論は，3次元反ドジッター空間上の弦理論(または重力理論)のゲージ・重力対応やブラック・ホールの微視的記述等で威力を発揮している．

最近では4次元超対称ゲージ理論の双対としての2次元共形場理論の研究も盛んであり，また，高いスピンの場を含むように拡張した重力理論の双対と考えられる共形場理論の研究も興味深いテーマになってきている．さらに，共形代数の表現論と，保型形式の理論，そして巨大な位数を持った有限群との間のミステリアスな関係である「ムーンシャイン」と呼ばれる現象に新しい発展があり，本書の最後の部分で紹介したい．

以下，簡単にではあるが，本書の各章の内容について紹介しよう：

1章では「共形ワード・高橋恒等式」や「ビラソロ代数」といった共形場理論の基礎的な概念について丁寧に解説し，共形場理論の簡単な具体例として，零質量の自由ボソン場や自由フェルミオン場について解説する．

2章では，主に基本的なビラソロ代数の表現論と「ミニマル模型」と呼ばれる有名な模型について解説する．1, 2章までで共形場理論の基礎的な部分はカバーされる．

3, 4章では，重要な拡張として「カレント代数」の対称性を持つ共形場理論の基礎について詳しく解説する．3章ではカレント代数の基本的な定義から始め，この対称性を持つ代表的な共形場の模型である「WZW模型」を導入する．4章ではカレント代数の表現論についてやや数学的な観点から解説する．リー代数が苦手な読者は，最初は4.3節は読み飛ばして，必要な公式を拾い読みするという形で差支えない．

5章では，共形場理論において重要な役割を果たす「モジュラー不変性」について基本から解説する．主に自由ボソンや自由フェルミオンに帰着する系を具体例として取り上げ，モジュラー不変分配関数を経路積分と演算子形式の2つのやり方で計算するとともに，関連するトピックについて解説する．

6章では，少し抽象的な内容になるが，「有理共形場理論」と呼ばれる性質

のよいクラスの模型について概論を述べる．そこでは「共形ブロック」や「双対性」(交差対称性，交換対称性)といった共形場理論における重要なアイデアについて紹介する．有理共形場理論におけるモジュラー不変性と，その重要な応用である「フェアリンデ公式」についても初心者向けの解説を行う．6章の最後の部分では，カレント代数の重要な応用であり，有理共形場理論の分類等に威力を発揮する「コセット構成」についても，ページ数が許す範囲でできるだけ詳しい解説を試みた．

7章では，共形対称性に加えて「超対称性」もあわせ持つ「超共形場理論」についての詳しい解説を行う．この章は本書の最も特徴的な部分かもしれない．$\mathcal{N}=1$, $\mathcal{N}=2$, そして$\mathcal{N}=4$ の超共形場理論について，超共形代数の表現論や指標公式等の系統的な解説を行うことを目指す．また，一部ではあるが，超共形場理論の弦理論や数理物理の興味深いトピックへの応用についても紹介し，最後には，最近の「ムーンシャイン現象」についての新しい発展について簡単に紹介する．

本書では，2次元の共形場理論について，その基礎から先端の研究までを解説する本格的な教科書を目指し，特に超対称性を持つ共形場理論の詳しい解説を試みる．2次元の共形場理論の持つ本来の意義は変わっていないと考えるが，上で述べたように，現在ではその応用される領域は多岐にわたる．本書が共形場理論そのものに興味がある読者のみならず，さまざまな動機で共形場理論のことを知りたいと考える全ての諸姉諸兄の一助となれば幸いである．

2015年7月7日

江口 徹
菅原祐二

目　次

1
共形場理論の基礎

1.1　共形場理論とは？

共形場理論とは「共形変換に対し不変な場の量子論」であり，本章では2次元の共形場理論について基礎的な解説を行う．

共形変換のもとで線分の長さは変化するが，交差する線分の間の角度は変化しない．特に，2次元空間では，複素座標 $z=x_1+ix_2$ の任意の変換 $z \to f(z)$ が共形変換を与える（$f(z)$ は任意の正則関数）．したがって共形変換は無限個の生成子を持ち，無限次元の代数を形成する．この代数は**ビラソロ代数**と呼ばれ，弦理論の研究に初めて登場した．量子力学や素粒子物理学ではさまざまな対称性を表すリー代数が活躍するが，共形場理論においては，ビラソロ代数がより「支配的」な役割を果たすと言ってもよいであろう．

まえがきでも触れたように，通常我々が興味を持つ性質のよい場の理論においては，「共形不変性」は「スケール不変性」とほぼ同義と考えてよい．しかしながら，場の理論では多くの場合，たとえ古典的作用がスケール不変であったとしても，量子論においてはくりこみの効果によってダイナミカルなスケールが理論に出現し，そのためスケール不変性は（したがって共形不変性も）破れてしまう*1．場の量子論では，スケール変換はくりこみの質量スケールを変えるくりこみ群の概念を用いて精密に定式化する必要があり，「場の量子論がスケール不変」とは「くりこみ変換で有効作用が不変である」ということを意味している．言い換えれば，理論のパラメータ空間の中でくりこみ群のフロー

*1　たとえば4次元のゲージ理論は古典作用が質量項を持つことができず，またゲージ結合定数が無次元となるので，スケール不変であるが，多くの場合共形場理論ではない．4次元ゲージ理論が厳密に共形場理論となる有名な例として，$\mathcal{N}=4$ の超対称ヤン・ミルズ理論がある．

(流れ)を考えたときに，動かない点(=固定点)が共形場理論に対応しており，

共形場理論 ＝ くりこみ群の固定点直上の場の量子論

と表現することができる．

多くの場合，共形対称性はアノマリー(量子的な対称性の破れ)を持ち，たとえくりこみ群の固定点にあったとしても，**曲がった時空上で考える**と曲率半径があらたなスケールとして物理量の計算に登場し，スケール不変性が量子論のレベルで破れることとなる．もちろん，このタイプの「幾何学的な」スケール不変性の破れは平坦な時空では回復する．共形場理論ではこのタイプの対称性の破れは許容しており，むしろそれによって「豊富な理論的多様性を獲得している」と述べることもできるであろう．1.3 節以降で詳しく述べるが，このアノマリーの大きさは共形場理論を特徴付ける重要なパラメータであり，物理系の自由度の大きさの目安を与え，ビラソロ代数の表現論においては**中心電荷**として活躍することとなる*2.

1.2　共形変換

共形場理論とは「共形変換で不変な場の理論」であるから，まずは「共形変換とは何か？」ということから説明しよう．やや数学的な準備から始める．

多様体(空間) M において，滑らかな 1 対 1 写像 $\varphi: x\in M \mapsto x'\in M$ の逆写像 φ^{-1} がまた滑らかであるとき，微分同相写像(diffeomorphism)と呼ぶ．微分同相を簡単に「M 上の変換」と呼ぶことも多い．一方，M 上の点は動かさずに座標を別の座標に取り直すことを座標変換と呼ぶ．一般に N 階の共変テンソル場とは座標変換によって，その成分が，

$$T'_{\mu_1,\cdots,\mu_N}(x') = T_{\nu_1,\cdots,\nu_N}(x)\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_N}}{\partial x'^{\mu_N}}, \tag{1.1}$$

と変換される多成分場のことである．ここで，x, x' は**同一点**を異なる座標系

*2　くりこみ群やアノマリーについてなじみのない読者は，場の量子論の教科書 [14, 15, 16] などを参照してもらえばよい．経路積分の立場からアノマリーについて詳しく解説した教科書として [18] を挙げておく．

で表したものであり，テンソルの添え字についてアインシュタインの和の規則を用いている．言い換えると，

$$T'_{\mu_1,\cdots,\mu_N}(x')\,dx'^{\mu_1}\otimes\cdots\otimes dx'^{\mu_N}=T_{\nu_1,\cdots,\nu_N}(x)\,dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_N},$$

ということであり，$T\equiv T_{\nu_1,\cdots,\nu_N}(x)\,dx^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\nu_N}$ が座標系の選び方によらない意味を持つ．

テンソル場 T の微分同相 φ による変換[*3] φ^*T を次式で定義する；

$$(\varphi^*T)_{\mu_1,\cdots,\mu_N}(x)\equiv T_{\nu_1,\cdots,\nu_N}(\varphi(x))\,\frac{\partial\varphi(x)^{\nu_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial\varphi(x)^{\nu_N}}{\partial x^{\mu_N}}. \qquad (1.2)$$

読者は(1.2)の右辺が確かに座標変換に対してテンソル場の変換性(1.1)を示すことを確認してほしい．さらに微分同相が無限小変換 $\varphi^\mu(x)=x^\mu+\epsilon v^\mu(x)$，($\epsilon$ は微小なパラメータ，$v\equiv v^\mu(x)$ はベクトル場)の場合，テンソル場の無限小変換を ϵ の 2 次以上を無視することにより，

$$\varphi^*T(x)=T(x)+\epsilon\delta_v T(x)+O(\epsilon^2) \qquad (1.3)$$

と定義する．$\delta_v T$ も同じ階数のテンソル場となることは定義から明らかであろう．(1.2)を用いて成分についてあらわに計算してみると，たとえば 2 階のテンソル場ならば，

$$\begin{aligned}
&(\varphi^*T)_{\mu\nu}(x)-T_{\mu\nu}(x)\\
&\quad=T_{\alpha\beta}(x+\epsilon v)\left(\delta^\alpha_\mu+\epsilon\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu}(x)\right)\left(\delta^\beta_\nu+\epsilon\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\nu}(x)\right)-T_{\mu\nu}(x)\\
&\quad=\epsilon\left[v^\rho(x)\frac{\partial}{\partial x^\rho}T_{\mu\nu}(x)+T_{\alpha\nu}(x)\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu}(x)+T_{\mu\beta}(x)\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\nu}(x)\right]+O(\epsilon^2),
\end{aligned}$$

より，

$$\delta_v T_{\mu\nu}(x)=v^\rho(x)\frac{\partial}{\partial x^\rho}T_{\mu\nu}(x)+T_{\alpha\nu}(x)\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu}(x)+T_{\mu\beta}(x)\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\nu}(x), \qquad (1.4)$$

と計算される．より一般に N 階の共変テンソル場ならば，

---

*3 数学用語ではテンソル場の「引き戻し」(pull-back)と呼ぶ．微分同相で移された点 $\varphi(x)$ のテンソル場の値を「引き戻す」ことによって新しいテンソル場を作っているわけである．また「無限小変換」(1.3)のことを「リー微分」を呼ぶ．

$$\delta_v T_{\mu_1,\cdots,\mu_N}(x)=v^\nu(x)\frac{\partial}{\partial x^\nu}T_{\mu_1,\cdots,\mu_N}(x)+\sum_{j=1}^{N}T_{\mu_1,\cdots,\mu_{j-1},\nu_j,\mu_{j+1},\cdots,\mu_N}(x)\frac{\partial v^{\nu_j}(x)}{\partial x^{\mu_j}}, \tag{1.5}$$

である.

さて，理論を考える d 次元多様体 M 上にリーマン計量 $ds^2=g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ が与えられているとしよう．微分同相 φ がある実数値関数 $\rho(x)$ に対し次の性質を満たすとき**共形変換**(conformal transformation)と呼ぶ；

$$(\varphi^* g)_{\mu\nu}(x) = e^{\rho(x)}g_{\mu\nu}(x). \tag{1.6}$$

共形変換全体は群をなし(共形変換群)，計量を不変に保つ等長変換(isometry)を部分群として含んでいる.

共形変換の幾何学的意味を考えてみよう．まず，**ワイル・スケーリング**(ワイル変換)を

$$g_{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = e^{\rho(x)}g_{\mu\nu}(x) \tag{1.7}$$

と定義する．すなわち，共形変換とは計量にワイル・スケーリングを引き起こす微分同相であると言える．計量テンソルは空間の各点ごとの接ベクトルの内積を与える幾何学量であるから，ワイル・スケーリングは各点ごとに接ベクトルの大きさを変えている．しかし 2 つの接ベクトルの間の角度は不変に保たれている；

$$\cos\theta = \frac{g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\sqrt{g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\sqrt{g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}} = \frac{\tilde{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{\sqrt{\tilde{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})}\sqrt{\tilde{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}}. \tag{1.8}$$

ここで，$g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ は接ベクトルの内積を意味し，あらわには，$g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=g_{\mu\nu}u^\mu v^\nu$ である．以上の考察より，共形変換とは空間の無限小領域(≅ 接空間)における図形の形を不変に保つ変換(相似変換)であると述べることができる[*4]．これが「共形」(conformal)の名の由来である.

*4 $\rho(x)$ は定数とは限らない関数であることに注意しよう．すなわち，共形変換が「図形の形を保つ」というのはあくまで無限小領域に限った主張であり，必ずしも有限領域の図形を相似形に写すことは要請していない．たとえば一般の共形変換によって直線は曲線に写される.

無限小変換の立場で共形変換を表現するのも便利である．無限小変換 $\varphi(x)^\mu=x^\mu+\epsilon v^\mu(x)$ に対し条件(1.6)を書き下すと，$\sigma(x)$ を任意の実関数として，

$$\delta_v g_{\mu\nu}(x)=\sigma(x)g_{\mu\nu}(x),$$

が得られる．あるいは公式(1.4)より，$\delta_v g_{\mu\nu}$ は，

$$\begin{aligned}\delta_v g_{\mu\nu}&=v^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu}+g_{\alpha\nu}\partial_\mu v^\alpha+g_{\mu\beta}\partial_\nu v^\beta\\&\equiv\nabla_\mu v_\nu+\nabla_\nu v_\mu,\end{aligned}\tag{1.9}$$

と計算されるので，

$$\nabla_\mu v_\nu(x)+\nabla_\nu v_\mu(x)=\sigma(x)g_{\mu\nu}(x),\tag{1.10}$$

が得られる．ここで，(1.9)の2行目ではリーマン接続の共変微分 ∇_μ を用いている*5．(1.10)の両辺の縮約(トレース)を取ると，$\sigma(x)=\dfrac{2}{d}\nabla_\rho v^\rho(x)$ と求められるので，最終的にベクトル場 $\epsilon^\mu(x)$ に対する方程式として，

$$\nabla_\mu v_\nu(x)+\nabla_\nu v_\mu(x)=\frac{2}{d}\nabla_\rho v^\rho(x)g_{\mu\nu}(x),\tag{1.11}$$

が得られる．これを満たすベクトル場 $v^\mu(x)$ を「計量 $g_{\mu\nu}$ に対する**共形キリング・ベクトル場**(conformal Killing vector field)」と呼び*6，無限小共形変換の生成子となる．

d 次元ユークリッド空間 $g_{\mu\nu}(x)=\delta_{\mu\nu}$ では，(1.11)はより簡単な方程式；

$$\partial_\mu v_\nu(x)+\partial_\nu v_\mu(x)=\frac{2}{d}\partial_\rho v^\rho(x)\delta_{\mu\nu},\tag{1.12}$$

に帰着し，独立解を求めることができる．表1.1には d 次元ユークリッド空間の共形キリング・ベクトル場とその積分形(パラメータの大きさが有限のときの共形変換の形)が示してある．$d>2$ ではこの表は共形キリング・ベクトルを

---

*5　(1.9)の2行目を最も簡単に得るには，$\delta_v g_{\mu\nu}$ がテンソル場であることから微分をすべて共変微分に置き換えても値は変わらないという事実に注目し，$\nabla_\rho g_{\mu\nu}=0$ を用いればよい．

*6　より簡単な

$$\delta_v g_{\mu\nu}(x)\equiv\nabla_\mu v_\nu(x)+\nabla_\nu v_\mu(x)=0$$

の解がキリング・ベクトル場である．キリング・ベクトル場は無限小等長変換を生成する．

表 1.1　d 次元の共形変換

	無限小変換	有限変換	パラメータ数
並進	a^μ	$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$	d
回転	$\omega_{\mu\nu}x^\nu$ $(\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu})$	$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,\ (\Lambda^t\Lambda = I)$	$\dfrac{d(d-1)}{2}$
スケール変換	ϵx^μ	$x'^\mu = \lambda x^\mu$	1
特殊共形変換	$\lvert x\rvert^2 b^\mu - 2(b\cdot x)x^\mu$	$x'^\mu = \dfrac{x^\mu + \lvert x\rvert^2 b^\mu}{1+2b\cdot x+\lvert b\rvert^2\lvert x\rvert^2}$	d

尽くしている．これらは d 次元時空の共形変換群を生成し，$SO(d,2)$ に同型であることが知られている．実際，表 1.1 に与えられているパラメータ数の総和は $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ となるが，これは $SO(d,2)$ の次元と等しい．

それでは 2 次元の場合を考えてみよう．条件(1.12)は

$$\frac{\partial v^1}{\partial x^1} = \frac{\partial v^2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial v^1}{\partial x^2} = -\frac{\partial v^2}{\partial x^1} \tag{1.13}$$

に帰着する．複素ベクトル場 $v^z \equiv v^1 + iv^2$ と複素座標 $z \equiv x^1 + ix^2$ $(\bar{z} = x^1 - ix^2)$ を導入すると，(1.13)は，コーシー・リーマン方程式(関係式)と解釈できる．すなわち，複素偏微分演算子

$$\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \partial_{\bar{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \tag{1.14}$$

を定義したとき，

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v^z = 0, \tag{1.15}$$

が成立する．こうして，2 次元の無限小共形変換は正則なベクトル場であり，有限の共形変換は正則な微分同相：

$$z \longmapsto z' \equiv f(z), \quad \bar{z} \longmapsto \bar{z}' \equiv \overline{f(z)}, \quad (\partial_{\bar{z}} f(z) = \partial_z \overline{f(z)} = 0)$$

であると結論される．

この事実は次のように示すこともできる．複素座標 z, $\bar{z}$ を用いると 2 次元のユークリッド計量は，

$$ds^2 = \frac{1}{2}|dz|^2,$$

と表せる．一方，微分同相は，

$$(z,\bar{z}) \longmapsto (f(z,\bar{z}), \overline{f(z,\bar{z})}),$$

と表されるが，もし f が正則ならば，$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f = \frac{\partial}{\partial z}\bar{f} = 0$ となるため，計量の f による変換は，

$$ds^2 \longrightarrow f^*(ds^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}dz \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\overline{dz} \equiv \frac{1}{2}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 ds^2, \tag{1.16}$$

となる．$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2$ をワイル・スケーリングの因子 e^ρ と同定すれば，(1.16)は，確かにこの変換が共形変換であることを示している．

もう少し精密に用語を定義しておこう．上で見たように2次元の共形場理論では複素座標が活躍するために，リーマン面(=1 次元複素多様体)上で考えられることが多い．このとき複素座標近傍：$U \cong \mathbb{C}$ から原点を除外した領域：$U \backslash \{0\}$ で正則なベクトル場を，**局所的な**無限小共形変換と呼ぶ．これに対し，考えているリーマン面全体で正則なベクトル場を**大域的な**無限小共形変換と呼ぶ．有限の共形変換についても同様に定義する．以下，単に「共形変換」と言えば局所的な変換のことと約束する．局所的な無限小共形変換は，$z=0$ のまわりのローラン展開で表すのが便利である；

$$z \longmapsto \varphi(z) \equiv z + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n z^{n+1}. \tag{1.17}$$

$\bar{z}$ の変換はこの複素共役である．明らかに変換(1.17)は無限個の生成子を持ち，複素ベクトル場で次のように表そう*7；

$$\ell_n \equiv -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.18}$$

---

*7　ベクトル場(=1 階の反変テンソル場)は，

$$v(x) = v^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

と微分演算子の形で表すのが便利である．ちょうど，反対称共変テンソル場を微分形式で表すのと同様に，この表式は座標系の選び方によらない意味を持つ．また，量子力学において運動量や角運動量演算子を波動関数に対する微分演算子として表すように，ベクトル場が無限小の微分同相変換であるという事実をうまく言い表している．

これらのベクトル場は次の交換関係(リー括弧)を持つ;

$$[\ell_m, \ell_n] = (m-n)\ell_{m+n}, \qquad (m, n \in \mathbb{Z}). \tag{1.19}$$

したがって(1.18)は無限次元のリー代数を生成する. このように, 局所的な共形変換が無限次元の代数をなすというのが2次元の共形場理論の著しい特徴であり, 2次元で共形対称性が強力な解析手段となる所以である.

それでは大域的な共形変換はどのように与えられるであろうか? 大域的な性質なので理論を定義する空間のトポロジーに依存するが, 最も基本的なリーマン球面:$\mathbb{CP}^1 \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ で考えると次のようになる. まず, $z=0$ の近傍での正則性より, (1.17)で $n \geq -1$ である;

$$v(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \epsilon_n z^{n+1} \frac{\partial}{\partial z}.$$

次に, $z=\infty$ の近傍の正則性を要請しなければならないが, それには複素関数論で教わるように, $w=\dfrac{1}{z}$ と座標変換をし, $w=0$ のまわりのふるまいを調べてやればよい. $v^z(z)\dfrac{\partial}{\partial z}=v^w(w)\dfrac{\partial}{\partial w}$ の関係より,

$$v^w(w) = v^z(z)\,\frac{\partial w}{\partial z} = v^z(z)\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n\, z^{n-1} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n\, w^{-n+1},$$

であることがわかるので, $w=0$ における正則性は, $n \leq 1$ を導く. 以上より, (1.17)において, ϵ_1, ϵ_0, ϵ_{-1} のみがゼロではないベクトル場が大域的な無限小共形変換であることが結論される. すなわち, 大域的な無限小共形変換の生成子は $\{\ell_1, \ell_0, \ell_{-1}\}$ であり, これらは(1.19)の $\mathfrak{sl}(2)$ 部分代数をなす;

$$[\ell_0, \ell_{\pm1}] = \mp\ell_{\pm1}, \quad [\ell_1, \ell_{-1}] = 2\ell_0. \tag{1.20}$$

反正則部分も合わせて, 全体で6個の生成子を持つ $\mathfrak{sl}(2)\otimes\mathfrak{sl}(2)$ が大域的な無限小共形変換の代数となる. 対応する有限の大域的共形変換はリー群 $SL(2,\mathbb{C})$ を生成し, 1次分数変換(メビウス変換)の形で複素座標 z に作用する;

$$SL(2,\mathbb{C}) \simeq SO(2,2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc=1 \right\}, \tag{1.21}$$

表 1.2　$SL(2,\mathbb{C})$ 変換

	ベクトル場	有限変換	パラメータ数
並進	$v^z(z)=\epsilon_{-1}$	$z'=z+a$	2
回転	$v^z(z)=\epsilon_0 z, (\epsilon_0\in i\mathbb{R})$	$z'=cz, (\|c\|=1)$	1
スケール変換	$v^z(z)=\epsilon_0 z, (\epsilon_0\in\mathbb{R})$	$z'=cz, (c>0)$	1
特殊共形変換	$v^z(z)=\epsilon_1 z^2$	$z'=\dfrac{z}{1-bz}$	2

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}. \tag{1.22}$$

表 1.2 には大域的な共形変換をまとめてある．回転とスケール変換は係数 c を(ゼロでない)複素数としたとき，ひとつの変換則 $z\mapsto z'=cz$，$c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ にまとめられることに注意しよう．

1.3　プライマリー場とエネルギー・運動量テンソル

以下，2 次元の共形場理論を考える．共形場理論とは前節で定義した共形変換に対して不変な場の理論であり，そこでは共形変換に対して「よい」変換性を示す場が重要な役割を果たす．ちょうど一般相対性理論においてテンソル場を用いて理論を記述することに似ている．さらに，共形変換に対する保存カレントとしてエネルギー・運動量テンソルを導入する．

1.3.1　プライマリー場

共形座標変換 $z\to z'$ のもとで次の変換則にしたがって座標変換を受ける場を**共形ウェイト(共形次元)** $(h,\bar{h})$ を持つ**プライマリー場**と呼ぶ [21]；

$$\Phi(z,\bar{z}) = \Phi'(z',\bar{z}')\left(\frac{dz'}{dz}\right)^h\left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}}\right)^{\bar{h}}. \tag{1.23}$$

この変換則は正則な座標変換のもとで

$$\Phi(z,\bar{z})dz^h d\bar{z}^{\bar{h}} \tag{1.24}$$

が不変であることと同等である．ここで h と $\bar{h}$ は独立な2つの実数であり，通常正の値を取る*8．プライマリー場はテンソル場の自然な拡張であり，変換則(1.23)は h，$\bar{h}$ が整数のときは2次元空間でのテンソル場の変換則と考えることができる．読者は(1.23)と前節の(1.1)を比較してこの点を確かめてみてほしい．たとえば，リーマン面の理論で現れるアーベル微分 ω は変換則 $\omega(z)dz=\omega'(z')dz'$ に従う(微分形式の変換性)．またリーマン面のモジュライの理論に現れる2次微分 Q は変換則 $Q(z)dz^2=Q'(z')dz'^2$ を持つ．したがって，これらの量はそれぞれ共形ウェイト ($h=1, \bar{h}=0$)，共形ウェイト ($h=2, \bar{h}=0$) プライマリー場とみなすことができる．

まず原点のまわりの回転

$$z \mapsto z' = e^{i\theta}z, \qquad \bar{z} \mapsto \bar{z}' = e^{-i\theta}\bar{z}, \qquad \theta \in \mathbb{R}, \tag{1.25}$$

を考えよう．(1.23)を用いると，回転(1.25)のもとでプライマリー場が

$$\Phi(z,\bar{z}) = \Phi'(z',\bar{z}')e^{i\theta(h-\bar{h})} \tag{1.26}$$

のように変換することがわかる．この式は場 Φ がスピン $s=h-\bar{h}$ を持つことを意味している($SO(2)=U(1)$ のスピン s の表現行列は $e^{is\theta}$ に等しい)．一方スケール変換

$$z \mapsto z' = \lambda z, \qquad \bar{z} \mapsto \bar{z}' = \lambda\bar{z}, \qquad \lambda > 0 \tag{1.27}$$

を考えると

$$\Phi(z,\bar{z}) = \Phi'(z',\bar{z}')\lambda^{(h+\bar{h})} \tag{1.28}$$

となり，これより場 Φ のスケーリング次元が $\Delta=h+\bar{h}$ となることがわかる．

したがって共形ウェイト $h,\bar{h}$ の和と差はスケーリング次元 Δ とスピン s を与える；

$$h+\bar{h} = \Delta, \qquad h-\bar{h} = s. \tag{1.29}$$

*8 理論のユニタリ性を要請すると，$h,\bar{h}\geq 0$ でなければいけないことが示される．また，多くの興味ある共形場理論の模型では，h, $\bar{h}$ は有理数である．

プライマリー場の無限小共形変換則を議論しよう．そのために(1.2)にならって，正則な微分同相(=共形変換) $F: z \mapsto F(z)$ によるプライマリー場の変換を次式で定義する；

$$(F^*\Phi)(z,\bar{z}) \equiv \Phi(F(z),\overline{F(z)}) \left(\frac{dF}{dz}\right)^h \overline{\left(\frac{dF}{dz}\right)}^{\bar{h}}. \tag{1.30}$$

そして(1.3)と同様に，無限小変換(ϵ は微小なパラメータ)

$$F(z) = z+\epsilon f(z)+O(\epsilon^2),$$

に対し，

$$\begin{aligned} F^*\Phi(z,\bar{z}) &= \Phi(z+\epsilon f(z), \bar{z}+\bar{\epsilon}\bar{f}(\bar{z})) \left(1+\epsilon f'(z)\right)^h \overline{(1+\epsilon f'(z))}^{\bar{h}} + O(\epsilon^2) \\ &\equiv \Phi(z,\bar{z})+\epsilon\Delta_f\Phi(z,\bar{z})+O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

によって，プライマリー場 $\Phi(z,\bar{z})$ の無限小共形変換 $\Delta_f\Phi(z,\bar{z})$ を定義する．すなわち，

$$\begin{aligned} \Delta_f\Phi(z,\bar{z}) &= f(z)\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z,\bar{z})+ h\, f'(z)\Phi(z,\bar{z}) \\ &\qquad +\overline{f(z)}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Phi(z,\bar{z})+\bar{h}\,\overline{f'(z)}\Phi(z,\bar{z}) \\ &\equiv \delta_f\Phi(z,\bar{z})+\bar{\delta}_f\Phi(z,\bar{z}) \end{aligned} \tag{1.31}$$

である．ここで，正則部分 $\delta_f\Phi(z,\bar{z})$ と反正則部分 $\bar{\delta}_f\Phi(z,\bar{z})$ に自然に分離できたことに注意しよう．このため任意のプライマリー場の変化はあたかもプライマリー場が共形ウェイト $(h,0)$ を持つ正則部分と $(0,\bar{h})$ を持つ反正則部分に因子化していると考えて計算を進めることができる；

$$\Phi_{h,\bar{h}}(z,\bar{z}) = \Phi_h(z)\bar{\Phi}_{\bar{h}}(\bar{z}).$$

この事実は本節以降でよく用いられる．

具体的に $f(z)=z^{n+1}$ ($^\forall n\in\mathbb{Z}$) とおくと，(1.31)は，

$$
\begin{cases}
\delta_f \Phi(z,\bar{z}) & \equiv z^{n+1}\dfrac{\partial}{\partial z}\Phi(z,\bar{z}) + h\,(n+1)z^n\;\Phi(z,\bar{z}), \\
\bar{\delta}_f \Phi(z,\bar{z}) & \equiv \bar{z}^{n+1}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\Phi(z,\bar{z}) + \bar{h}\,(n+1)\bar{z}^n\;\Phi(z,\bar{z}),
\end{cases}
\tag{1.32}
$$

と書くことができる．(1.32)をプライマリー場の定義式と考えることもでき，よく用いられる関係式である．特に大域的な無限小共形変換：$n=+1,0,-1$ に対してのみ(1.32)を満たす場を**準プライマリー場**と呼ぶ．言い換えれば，準プライマリー場とは，1 次分数変換(1.22)に対してプライマリー場と同様に変換される場のことである．

1.3.2　エネルギー・運動量テンソル

場の理論で対称性を論じるにはそのネーター・カレントが重要な役割を果たす．共形変換は時空の微分同相の一部であるから，ネーター・カレントとして働くのはエネルギー・運動量テンソルである．

出発点は一般相対性理論でおなじみの微分同相不変($\cong$ 一般共変)な場の理論である．すなわち，場の力学変数 X と計量 $g_{\mu\nu}$ を同時に任意の微分同相 φ で変換したとき，古典作用 S が不変であることを仮定する；

$$
S[\varphi^* X, \varphi^* g_{\mu\nu}] = S[X, g_{\mu\nu}]. \tag{1.33}
$$

このとき力学変数 X を固定して計量 $g_{\mu\nu}$ について作用 S を変分するとき，

$$
\begin{aligned}
\delta S \equiv S[X, g_{\mu\nu}+\delta g_{\mu\nu}] - S[X, g_{\mu\nu}] &= \frac{1}{4\pi}\int d^d x\sqrt{g}\,T^{\mu\nu}(x)\delta g_{\mu\nu}(x) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int d^d x\sqrt{g}\,T_{\mu\nu}(x)\delta g^{\mu\nu}(x),
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

によって，**エネルギー・運動量テンソル**を定義する．2 行目は恒等式 $\delta g^{\rho\sigma} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\mu\nu}$ による(負号に注意)．いつものように $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ という記号を用いている．あるいは汎関数微分の記号を用いると，

$$
T^{\mu\nu} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{g}}\,\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \quad \left(\Longleftrightarrow\; T_{\mu\nu} \equiv -\frac{4\pi}{\sqrt{g}}\,\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}\right), \tag{1.35}
$$

と書ける．定義によりエネルギー・運動量テンソルは対称テンソルである．

ネーターの定理より，微分同相による理論の不変性はエネルギー・運動量の

「共変保存則」

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu}(x) = 0 \tag{1.36}$$

を導く．ここで ∇_{μ} は共変微分である．

本書では，計量 $g_{\mu\nu}$ は背景場として扱い，ダイナミカルな力学変数とはみなさない．したがって，一般には計量を不変に保つ微分同相(=等長変換)のみが理論の対称性となる．ところが，理論にさらにワイル変換に対する対称性(=**ワイル不変性**)；

$$S[X,\, e^{\rho} g_{\mu\nu}] = S[X,\, g_{\mu\nu}], \tag{1.37}$$

があると，理論の対称性は共形変換群にまで拡大する．なぜなら，φ を任意の共形変換として $\varphi^* g_{\mu\nu}{=}e^{\rho} g_{\mu\nu}$ が成り立つとすると，仮定 (1.33), (1.37) より，

$$S[\varphi^* X, g_{\mu\nu}] = S[X, \varphi^{-1\,*} g_{\mu\nu}] = S[X, e^{-\rho} g_{\mu\nu}] = S[X, g_{\mu\nu}], \tag{1.38}$$

となるからである．(1.33)は(少なくとも古典的には)ほとんどの興味ある場の理論では成立する性質であるので，

共形不変な理論 $\cong$ ワイル不変な理論

と考えてよい．(1.34)，(1.37)を用いると，$T_{\mu\nu}$ のトレースがゼロになることがわかる；

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0. \tag{1.39}$$

しかしながら，一般に量子論のレベルではワイル不変性は破れる．これを**ワイル・アノマリー**または，**トレース・アノマリー**と呼ぶ．1.1 節で触れたように，トレース・アノマリーは時空の曲率に依存する形で現れ，その大きさは，後で議論するように共形場理論を分類する重要なパラメータとなる．

1.3.3 2 次元共形場理論におけるエネルギー・運動量テンソル

さて，本題である 2 次元のケースをもう少し詳しく見てみよう．時空の計量をユークリッド計量 $g_{\mu\nu}{=}\delta_{\mu\nu}$ とし，再び複素変数による記法を導入する．

すなわち複素座標として，$z \equiv x^1+ix^2$, $\bar{z} \equiv x^1-ix^2$ を導入し，1 形式の基底として dx^1, dx^2 の代わりに $dz=dx^1+idx^2$ と $d\bar{z}=dx^1-idx^2$, を用いる．またこれらの双対である偏微分演算子は，(1.14)で与えられる．

古典論においては，上で見たようにエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}(x)$ $(\mu,\nu=1,2)$ は次の性質を持つ；

$$\begin{cases} T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} & (\text{対称}), \\ \partial_\mu T_{\mu\nu} = 0 & (\text{保存}), \\ T_{11}+T_{22} = 0 & (\text{トレースゼロ}). \end{cases} \tag{1.40}$$

添え字の対称性とトレースゼロの条件から独立な成分は 2 つしかない．これらを T_{11} と T_{12} と取ろう．すると保存則は

$$\partial_1 T_{11}+\partial_2 T_{12} = 0, \qquad \partial_2 T_{11}-\partial_1 T_{12} = 0 \tag{1.41}$$

と書ける．複素表示ではエネルギー・運動量テンソルは次の 4 成分 T_{zz}, $T_{z\bar{z}}$, $T_{\bar{z}z}$, $T_{\bar{z}\bar{z}}$ を持つ．たとえば T_{zz} を実成分で表すと

$$T_{zz} = \frac{1}{4}\left(T_{11}-T_{22}-iT_{12}-iT_{21}\right) = \frac{1}{2}\left(T_{11}-iT_{12}\right) \tag{1.42}$$

である．他の成分は

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(T_{11}+iT_{12}\right), \qquad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0 \tag{1.43}$$

で与えられる．保存則(1.41)は

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_{zz} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z} T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{1.44}$$

を与える．したがって，2 次元の共形不変な場の理論ではエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は正則成分 $T(z) \equiv T_{zz}$ と反正則成分 $\bar{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}$ に分解する．$T(z)$ と $\bar{T}(\bar{z})$ それぞれ共形ウェイト $(2,0)$，$(0,2)$ を持つ準プライマリー場である．すなわち $SL(2,\mathbb{C})$ 変換(1.22)で，

$$T'(z') = (cz+d)^4\, T(z), \qquad z' = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1.45}$$

のように変換する．

1.4 共形ワード・高橋恒等式

場の量子論においては対称性の情報はワード・高橋恒等式(Ward-Takahashi identity; WT identity)に翻訳される．特に2次元の共形場理論においては，多くの重要な公式がワード・高橋恒等式のみから導かれる．

まず微分同相に対するワード・高橋恒等式を経路積分から導いてみよう．しばらくの間，ワイル不変性は仮定しない．2次元時空 Σ はコンパクトで境界を持たないとし，**平坦とは限らない**計量 $g_{\mu\nu}$ を持つとする*9．記号を簡単化するために量子場をまとめて ϕ と表そう．理論を定義する古典作用 $S[\phi, g_{\mu\nu}]$ は，ϕ と $g_{\mu\nu}$ を同時に変換する限り微分同相に対し不変であるとし，微分同相のアノマリー(=重力アノマリー)は無いと仮定する．すなわち経路積分測度 $\mathcal{D}\phi$ も微分同相で不変であると仮定する．

この設定のもとで，N 個の局所場(一般に ϕ の複合場) $\Phi_i(\xi_i)$ $(i{=}1,\cdots,N)$ の相関関数；

$$\left\langle \Phi_1(\xi_1)\cdots\Phi_N(\xi_N)\right\rangle \equiv \int \mathcal{D}\phi \prod_{i=1}^{N} \Phi_i(\xi_i)\, e^{-S[\phi,g_{\mu\nu}]},$$

を考えてみよう．以下記号を簡略化するため，$X\equiv\prod_{i=1}^{N}\Phi_i(\xi_i)$ と表す．ベクトル場 $\epsilon\equiv\epsilon^\mu(\xi)\partial_\mu$ で生成される無限小微分同相 δ_ϵ による基本場 ϕ や挿入されている局所場 $\Phi_i(\xi_i)$ の変換則は既知であるとする．まず経路積分測度に対する仮定より，相関関数 $\left\langle X\right\rangle$ は積分変数 ϕ を微分同相で変数変換しても自明に不変であるから，

$$\int \mathcal{D}\phi \prod_{i=1}^{N} \Phi_i(\xi_i)\, e^{-S[\phi,g_{\mu\nu}]} = \int \mathcal{D}\phi' \prod_{i=1}^{N} \Phi'_i(\xi_i)\, e^{-S[\phi',g_{\mu\nu}]},$$

$$\phi' \equiv \phi+\delta_\epsilon\phi, \quad \Phi'_i \equiv \Phi_i+\delta_\epsilon\Phi_i,$$

が成立する．すなわち，

---

*9　ここでは議論を単純にするためにこの仮定をしておく．閉リーマン面を想定していると考えてもらえばよい．$\Sigma=\mathbb{R}^2$ や，Σ が境界を持っているようなケースでは，ワード・高橋恒等式を導く議論で無限小微分同相(=ベクトル場) $\epsilon^\mu\partial_\mu$ に適切な境界条件を設定する必要がある．

$$\left\langle \delta_\epsilon X \right\rangle - \left\langle \left. \delta_\epsilon S \right|_{g_{\mu\nu}:\mathrm{fix}} X \right\rangle = 0, \tag{1.46}$$

である．ここで，記号 $\left.\delta_\epsilon S\right|_{g_{\mu\nu}:\mathrm{fix}}$ は，計量 $g_{\mu\nu}$ を固定して作用 $S[\phi, g_{\mu\nu}]$ の変分を取ることを意味する．一方微分同相に対する作用の不変性の仮定より，

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\delta_\epsilon S\right|_{g_{\mu\nu}:\mathrm{fix}} + \int_\Sigma d^2\xi \, \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \, \delta_\epsilon g_{\mu\nu} \\ &\equiv \left.\delta_\epsilon S\right|_{g_{\mu\nu}:\mathrm{fix}} + \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{g} \, \delta_\epsilon g_{\mu\nu} \, T^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.47}$$

が成立する．さらに，$\delta_\epsilon g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu$ と，$T_{\mu\nu}$ が対称テンソルであることを用いると，

$$\left.\delta_\epsilon S\right|_{g_{\mu\nu}:\mathrm{fix}} = -\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{g} \, (\nabla_\mu \epsilon_\nu) \, T^{\mu\nu}, \tag{1.48}$$

が得られる．(1.48)を(1.46)に代入して，

$$\delta_\epsilon X = \sum_{i=1}^{N} \Phi_1(\xi_1) \cdots \delta_\epsilon \Phi_i(\xi_i) \cdots \Phi_N(\xi_N),$$

を用いると，求めるワード・高橋恒等式として次式が得られる；

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{g} \, \nabla_\mu \epsilon_\nu(\xi) \left\langle T^{\mu\nu}(\xi) \prod_{i=1}^{N} \Phi_i(\xi_i) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \Phi_1(\xi_1) \cdots \delta_\epsilon \Phi_i(\xi_i) \cdots \Phi_N(\xi_N) \right\rangle = 0. \end{aligned} \tag{1.49}$$

さて，時空の計量をユークリッド計量 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ とし，ワイル不変性を仮定しよう．既に述べたように，このときエネルギー・運動量テンソルはトレースレス $T^\mu_\mu = 0$ となる．そして複素座標 $z, \bar{z}$ を取り，ベクトル場を z-成分のみとする(正則性は仮定しない)；

$$\epsilon \equiv \epsilon^z(z) \partial_z.$$

計量について，$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \dfrac{1}{2}$, $g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ が成立することに注意すると，

$$\epsilon_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \epsilon^z, \quad T^{\bar{z}\bar{z}} = 4T_{zz} \equiv 4T(z),$$

となるので，ワード・高橋恒等式(1.49)は，

$$\frac{1}{\pi}\int_{\Sigma} d^2z\, \partial_{\bar{z}}\epsilon^z(z) \left\langle T(z) \prod_{i=1}^{N} \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle$$
$$+\sum_{i=1}^{N} \left\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \delta_\epsilon \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \cdots \Phi_N(z_N, \bar{z}_N) \right\rangle = 0 \qquad (1.50)$$

を与える(局所場の挿入点 ξ_i を複素座標で $(z_i, \bar{z}_i)$ と書き直した). この形のワード・高橋恒等式を**共形ワード・高橋恒等式**と呼び, 共形場理論で最も基本的な役割を果たす [21].

1.4.1 共形ワード・高橋恒等式の応用

以下, 共形ワード・高橋恒等式(1.50)から簡単に得られる帰結をまとめてみよう；

(1) $T(z)$ の正則性

まず, $w \in \Sigma$ を局所場 Φ_i を挿入している時空点 z_i のいずれとも異なる任意の点とし, $\epsilon(z) \equiv \epsilon^z(z)\partial_z$ を, w の十分小さな近傍のみでゼロでない任意の滑らかなベクトル場に選ぶ(正則性は仮定しない). このとき Φ_i の局所性より,

$$\delta_\epsilon \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) = 0, \quad {}^\forall i = 1, \cdots, N,$$

が成り立つため, (1.50)の左辺第 2 項はゼロとなる. よって部分積分を用いると, ${}^\forall w \neq z_i$, $({}^\forall i = 1, \cdots, N)$ に対し,

$$\left\langle \partial_{\bar{w}} T(w) \prod_{i=1}^{N} \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) \right\rangle = 0, \qquad (1.51)$$

が得られる. これは, 局所場 Φ_i の挿入点以外では, $T(z)$ が正則であることを意味し, 既に述べた古典的なエネルギー・運動量の保存則に対応している. 全く同様にして, Φ_i の挿入点以外では, $\bar{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$ が反正則な演算子であることが導かれる.

(2) 無限小共形変換

エネルギー・運動量テンソル $T(z)$ が局所場 Φ_i に共形変換を引き起こす生成子として働く様子を見てみよう. 今 Φ_i の全ての挿入点 $z_1, \cdots, z_N$ を含む領

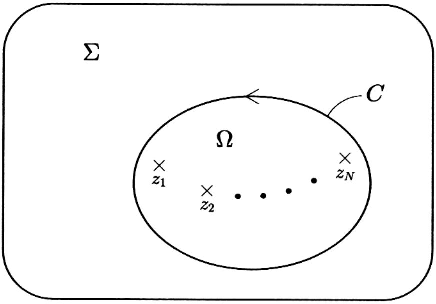


図 1.1 共形ワード・高橋恒等式を導くための局所場の配位と積分路

域 $\Omega\subset\Sigma$ を考え，その境界を C とする(図 1.1 参照)．そして $\epsilon\equiv\epsilon^z(z)\partial_z$ を領域 Ω で正則な任意のベクトル場とする．このとき，$\partial_{\bar{z}}\epsilon^z(z)=0$, $({}^\forall z\in\Omega)$ であるから，ワード・高橋恒等式(1.50)の第 1 項の積分は，領域 $\Sigma\backslash\Omega$ 上の積分に帰着し，また(1)で述べたように ${}^\forall z\in\Sigma\backslash\Omega$ では $T(z)$ は正則であるので，

$$(\partial_{\bar{z}}\epsilon^z(z))\,T(z)=\partial_{\bar{z}}\left(\epsilon^z(z)T(z)\right)$$

が成立する．よって，ストークスの定理により，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z\,\partial_{\bar{z}}\epsilon^z(z)\left\langle T(z)\prod_{i=1}^N\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\right\rangle\\
&\quad=\frac{1}{\pi}\int_{\Sigma\backslash\Omega}d^2z\,\partial_{\bar{z}}\left\langle\epsilon^z(z)T(z)\prod_{i=1}^N\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\right\rangle\\
&\quad=-\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\left\langle\epsilon^z(z)T(z)\prod_{i=1}^N\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\right\rangle
\end{aligned}$$

が得られる(負号は，$\partial(\Sigma\backslash\Omega)=-\partial\Omega=-C$ による)．よって，(1.50)は，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\left\langle\epsilon^z(z)T(z)\prod_{i=1}^N\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\right\rangle\\
&\quad=\sum_{i=1}^N\left\langle\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\delta_\epsilon\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\cdots\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\right\rangle,
\end{aligned}\tag{1.52}$$

を与える．この恒等式を共形ワード・高橋恒等式と呼ぶことも多い．1.3 節で解説したように，共形ウェイト $(h,\bar{h})$ を持つプライマリー場 $\Phi(z,\bar{z})$ の $\epsilon(z)\equiv$

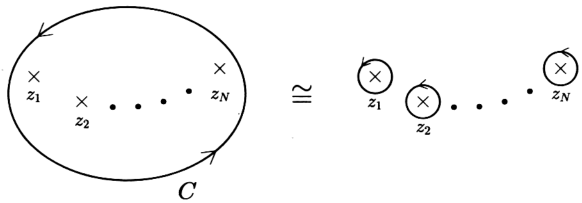


図 1.2　積分路の変形

$\epsilon^z(z)\partial_z$, $\overline{\epsilon(z)}\equiv\overline{\epsilon^z(z)}\partial_{\bar{z}}$ に対する無限小共形変換則は,

$$\delta_\epsilon\Phi(z,\bar{z}) = \epsilon^z(z)\partial_z\Phi(z,\bar{z})+h\left(\partial_z\epsilon^z(z)\right)\Phi(z,\bar{z}), \tag{1.53}$$

$$\delta_{\bar{\epsilon}}\Phi(z,\bar{z}) = \overline{\epsilon^z(z)}\partial_{\bar{z}}\Phi(z,\bar{z})+\bar{h}\,\overline{\left(\partial_z\epsilon^z(z)\right)}\,\Phi(z,\bar{z}), \tag{1.54}$$

と与えられている．コーシーの定理を用いて(1.52)の積分路 C を，各 Φ_i の挿入点 z_i を囲む小さな円周の和に変形することができる(図 1.2 参照)．それによって，演算子レベルで，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{z_i} dz\,\epsilon^z(z)T(z)\,\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\,(\equiv \mathrm{Res}_{z=z_i}\,[\epsilon^z(z)T(z)\,\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)]) = \delta_\epsilon\Phi_i(z_i,\bar{z}_i), \tag{1.55}$$

が成立すると解釈することができる．ここで，“$\oint_{z_i}$”は z_i を囲む小さな円周上の複素積分を表し，以後同様の表記を用いる．また，正確には左辺は 1.6.1 項で解説する「動径順序」の意味で理解する．公式(1.55)は 1.6 節で重要な役割を果たす．

(3)　大域的な共形対称性($SL(2,\mathbb{C})$ 不変性)

最後に $\Sigma=\mathbb{CP}^1\equiv\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ の場合に，**大域的な**共形対称性($\cong SL(2,\mathbb{C})$ 不変性)が相関関数に与える重要な帰結を導いておく．大域的な共形対称性は，$\Sigma=\mathbb{CP}^1$ 全体で正則なベクトル場 $\epsilon\equiv\epsilon^z(z)\partial_z$ に対応し，既に 1.2 節で解説したように，それは

$$\epsilon^z(z) = \sum_{n=-1,0,1}\epsilon_n z^{n+1}\partial_z, \tag{1.56}$$

と選ぶことに相当する．このとき，(1.50)の第 1 項の積分は自明にゼロとなる

ので，(1.56)に対して

$$\sum_{i=1}^{N}\left\langle \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\delta_\epsilon\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\cdots\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\right\rangle = 0, \tag{1.57}$$

が成立することが導かれる．この事実は 1.5 節で重要な役割を果たす．

1.4.2　2 つの $T(z)$ の挿入に対する共形ワード・高橋恒等式

続いて共形ワード・高橋恒等式(1.50)の拡張として，エネルギー・運動量テンソル $T(z)$ を 2 つ挿入する場合を考えてみよう*10．本項の結果は共形場理論で重要な役割を果たす $T(z)T(w)$ の演算子積展開を導く際に必要となる．

相関関数にエネルギー・運動量テンソルを挿入するには，計量について汎関数微分すればよい．すなわち，再び X を一般の局所場の積として，

$$\left\langle T^{\mu\nu}(\xi)X\right\rangle = -\frac{4\pi}{\sqrt{g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(\xi)}\left\langle X\right\rangle \tag{1.58}$$

である．まず**一般の曲がった 2 次元時空上の**ワード・高橋恒等式(1.49)から出発しよう．求めたいのは平坦な時空での $T(z)\equiv T_{zz}\equiv\frac{1}{4}T^{\bar{z}\bar{z}}$ の挿入であるから，計量 $g_{\mu\nu}$ に小さな摂動

$$g_{\mu\nu}(\xi) = \delta_{\mu,\nu}+\delta g_{\mu\nu}(\xi),\quad \delta g_{\bar{z}\bar{z}}(\xi) = h(\xi),\quad \delta g_{\alpha\beta}(\xi) = 0,\ \ ({}^\forall(\alpha,\beta)\neq(\bar{z},\bar{z})), \tag{1.59}$$

を加えてみて，h の 1 次のオーダーまで評価すれば，

$$-\pi\frac{\delta}{\delta h(\xi)}\left\langle X\right\rangle\bigg|_{h=0} = \left\langle T(\xi)X\right\rangle, \tag{1.60}$$

が計算できることとなる．

ここで重要なポイントは，一般にワイル不変性はアノマリーを持ち，曲がった時空ではエネルギー・運動量テンソルのトレースの期待値はゼロにはならないという事実である．既に述べたように，共形場理論ではトレースアノマリー $\left\langle T^\mu_{\ \mu}\right\rangle$ は幾何学量にしか依存することができず，

*10　本項は計算が少々煩雑になるので，初めて勉強する読者は結論の(1.68)のみ参照して次節に進んでもよい．TT の演算子積展開のシュウインガー項とトレース・アノマリーがどのように関係付くか，という問題について詳細に解説した文献が案外少ないようなので，ここで少しページを割いておく．

・質量次元 2 を持つ.
・計量テンソル $g_{\mu\nu}$ のみから作られるスカラーである.

という性質によって特徴づけられる. こうした幾何学量は 2 次元時空では定数倍を除きスカラー曲率 $\mathcal{R}$ 以外に存在しない. したがって, 2 次元の共形場理論におけるトレース・アノマリー(ワイル・アノマリー)の一般形は,

$$\left\langle T^{\mu}{}_{\mu}(\xi)\right\rangle = -\frac{c}{12}\mathcal{R}(\xi)\,Z, \tag{1.61}$$

と表すことができる. ここで, $Z\equiv\langle 1\rangle$ は分配関数であり, 平坦な時空で $Z=1$ と規格化しておいても曲がった時空では一般に $g_{\mu\nu}$ に依存することに注意. c はトレース・アノマリーの大きさを表す定数であり, 便宜上このように規格化しておく*11. $\mathcal{R}(\xi)$ は幾何学量であるから, (1.61)をもう少し拡張し,

$$\left\langle T^{\mu}{}_{\mu}(\xi)X\right\rangle = -\frac{c}{12}\mathcal{R}(\xi)\,\langle X\rangle, \tag{1.62}$$

と考えることもできる. 簡単な微分幾何の計算により, 計量(1.59)から $\mathcal{R}=4\partial_z^2 h+O(h^2)$ が得られる. 一方, (1.59)のもとで,

$$T^{\mu}_{\mu} = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 2g_{z\bar{z}}T^{z\bar{z}}+g_{\bar{z}\bar{z}}T^{\bar{z}\bar{z}}+g_{zz}T^{zz} = T^{z\bar{z}}+4hT+O(h^2),$$

が成り立つので, 公式(1.62)より,

$$\left\langle T^{z\bar{z}}(\xi)X\right\rangle = -\frac{c}{3}\partial_z^2 h(\xi)\left\langle X\right\rangle - 4h\left\langle T(\xi)X\right\rangle + O(h^2), \tag{1.63}$$

を得る. (1.49)に登場する共変微分 $\nabla_\mu\epsilon_{\bar{z}}$ を計算すると,

$$\nabla_{\bar{z}}\epsilon_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}}\epsilon_{\bar{z}} - \Gamma^{\bar{z}}{}_{\bar{z}\bar{z}}\epsilon_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}}\epsilon_{\bar{z}} + \partial_z h\,\epsilon_{\bar{z}}, \tag{1.64}$$

$$\nabla_{z}\epsilon_{\bar{z}} = \partial_{z}\epsilon_{\bar{z}} - \Gamma^{\bar{z}}{}_{z\bar{z}}\epsilon_{\bar{z}} = \partial_{z}\epsilon_{\bar{z}}, \tag{1.65}$$

となる. (1.63), (1.64), (1.65)を, ワード・高橋恒等式(1.49)に代入し, $\epsilon_{\bar{z}}=\frac{1}{2}\epsilon^z$ を思い出すと,

---

*11 共形場理論の最もやさしい例として, 1 成分の零質量実スカラー場の理論がある(1.8.1 項参照). c のこの規格化は, 実スカラー場 1 成分あたり $c=1$ となるように決められている. 平坦な時空上のボソニックな弦理論においては, c はターゲット空間の次元に等しい.

$$\frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2\xi\left[(\partial_{\bar z}\epsilon^z)\Big\langle T(\xi)X\Big\rangle+\{\epsilon^z\partial_z h-(\partial_z\epsilon^z)h\}(\xi)\Big\langle T(\xi)X\Big\rangle\right.$$
$$\left.-\frac{c}{12}(\partial_z\epsilon^z)(\partial_z^2 h)(\xi)\Big\langle X\Big\rangle\right]+\Big\langle\delta_\epsilon X\Big\rangle+O(h^2)=0,$$

を得る．さらに $\partial_z h$ を含む項について部分積分を行い，

$$\delta_\epsilon T\equiv\epsilon^z\partial_z T+2(\partial_z\epsilon^z)T+\frac{c}{12}\partial_z^3\epsilon^z, \tag{1.66}$$

という記号を導入すると，

$$\frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2\xi\ \left[(\partial_{\bar z}\epsilon^z)\Big\langle T(\xi)X\Big\rangle-h(\xi)\Big\langle\delta_\epsilon T(\xi)X\Big\rangle\right]+\Big\langle\delta_\epsilon X\Big\rangle+O(h^2)=0, \tag{1.67}$$

を得る．最後に(1.67)を $h(\zeta)$ について汎関数微分してから $h=0$ とおき，(1.60)を用いると，求める恒等式として，

$$\frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2\xi\,(\partial_{\bar z}\epsilon^z)(\xi)\Big\langle T(\xi)T(\zeta)X\Big\rangle+\Big\langle(\delta_\epsilon T)(\zeta)X\Big\rangle+\Big\langle T(\zeta)\delta_\epsilon X\Big\rangle=0, \tag{1.68}$$

が得られる．

式(1.68)は共形ワード・高橋恒等式(1.50)の自然な拡張とみなすことができる．したがって，(1.66)はエネルギー・運動量テンソル $T(z)$ の無限小共形変換を表す公式と解釈される．実際，(1.66)の第1項と第2項は，共形ウェイト2のプライマリー場の無限小共形変換に対する変換則と同じである．第3項の非斉次項はパラメータ c に比例しており量子論的なアノマリー項である．この3階微分の項は，大域的な共形変換(1.56)に対してはゼロとなり，以前述べたように $T(z)$ が共形ウェイト2の準プライマリー場である事実を示している．

1.5 $SL(2,\mathbb{C})$ 不変性と相関関数

本節では大域的な共形不変性，すなわち $SL(2,\mathbb{C})$ 不変性が相関関数の形をいかに決定するかを見てみよう．既に述べたように相関関数の正則部分(あるいは反正則部分)のみを調べれば十分である．

表 1.3 $SL(2,\mathbb{C})$ 不変性

$n=-1$ (並進)	$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_j}\left\langle \Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle=0$
$n=0$ (回転/スケール変換)	$\sum_{j=1}^{N}\left(h_j+z_j\frac{\partial}{\partial z_j}\right)\left\langle \Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle=0$
$n=1$ (特殊共形変換)	$\sum_{j=1}^{N}\left(2h_jz_j+z_j^2\frac{\partial}{\partial z_j}\right)\left\langle \Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle=0$

大域的な共形変換に対するワード・高橋恒等式(1.57)をあらわに書き下すと，表 1.3 にまとめた微分方程式系に帰着する．

(1) 1 点関数

まず，1 点関数 $\left\langle \Phi(z,\bar{z})\right\rangle$ の正則部分 $G(z)$ について $SL(2,\mathbb{C})$ 不変性を考えよう．$n=-1,0$ の条件から，

$$\frac{d}{dz}G(z)=0, \qquad \left(h+z\frac{d}{dz}\right)G(z)=0. \tag{1.69}$$

したがって，

$$G(z)=\begin{cases} \text{const} & (h=0), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \tag{1.70}$$

$n=1$ は新しい条件を与えない．もちろん反正則部分についてもまったく同様な結果が得られる．

共形ウエイト $(h,\bar{h})=(0,0)$ の場は恒等作用素 $\mathbf{1}$ である．したがって(ディスク上では)恒等作用素のみがゼロでない 1 点関数を与える；

$$\left\langle \Phi(z,\bar{z})\right\rangle=\begin{cases} 1 & (h=\bar{h}=0), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \tag{1.71}$$

(2)　2 点関数

$n=-1$ の不変性を課すと，2 点関数 $\left\langle \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\Phi_2(z_2,\bar{z}_2)\right\rangle$ の正則部分 $G(z_1,z_2)$ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial z_2}\right)G(z_1,z_2)=0 \tag{1.72}$$

を満たす．したがって G は座標の差のみに依存する；

$$G(z_1,z_2)=G(z_1-z_2). \tag{1.73}$$

このため $n=-1$ の不変性は並進不変性と等価であることがわかる．

次に $n=0$ の条件を考えよう；

$$\begin{aligned}0&=\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}+h_1+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}+h_2\right)G(z_1-z_2)\\&=\left\{(z_1-z_2)\frac{\partial}{\partial z_1}+(h_1+h_2)\right\}G(z_1-z_2).\end{aligned}$$

したがって，

$$G(z_1-z_2)=\frac{\text{const}}{(z_1-z_2)^{h_1+h_2}} \tag{1.74}$$

を得る．$n=1$ 不変性はさらに新しい条件を導く；

$$\begin{aligned}0&=\left(z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1}+2h_1z_1+z_2^2\frac{\partial}{\partial z_2}+2h_2z_2\right)G(z_1-z_2)\\&=\left\{-\frac{(h_1+h_2)(z_1^2-z_2^2)}{z_1-z_2}+2(h_1z_1+h_2z_2)\right\}G(z_1-z_2)\\&=(h_1-h_2)(z_2-z_1)G(z_1-z_2).\end{aligned}$$

よってゼロでない 2 点関数は $h_1=h_2$ の場合にのみ存在することがわかる．

このように $SL(2,\mathbb{C})$ 不変性は 2 点関数の形を完全に決定する；

$$\begin{aligned}&\left\langle \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\Phi_2(z_2,\bar{z}_2)\right\rangle\\&\quad=\begin{cases}\dfrac{\text{const}}{(z_1-z_2)^{2h_1}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{2\bar{h}_1}} & (h_1=h_2\ \text{かつ}\ \bar{h}_1=\bar{h}_2),\\ 0 & (\text{その他}).\end{cases}\end{aligned}$$

(3)　3 点関数

同様な議論で 3 点関数 $\left\langle \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\Phi_2(z_2,\bar{z}_2)\Phi_3(z_3,\bar{z}_3)\right\rangle$ の正則部分 $G(z_1, z_2, z_3)$ の関数形は次のように定まる；

$$G(z_1,z_2,z_3) \propto \frac{1}{(z_1-z_2)^{h_1+h_2-h_3}(z_2-z_3)^{h_2+h_3-h_1}(z_3-z_1)^{h_3+h_1-h_2}}. \tag{1.75}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\left\langle \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\Phi_2(z_2,\bar{z}_2)\Phi_3(z_3,\bar{z}_3)\right\rangle\\ &\quad = C_{123}\times\frac{1}{(z_1-z_2)^{h_1+h_2-h_3}(z_2-z_3)^{h_2+h_3-h_1}(z_3-z_1)^{h_3+h_1-h_2}}\\ &\qquad\times\frac{1}{(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3}(\bar{z}_2-\bar{z}_3)^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1}(\bar{z}_3-\bar{z}_1)^{\bar{h}_3+\bar{h}_1-\bar{h}_2}}.\end{aligned} \tag{1.76}$$

ここで C_{123} は構造定数と呼ばれる定数で，共形場理論の演算子積展開(OPE)を特徴付ける重要な量であるが，理論の $SL(2,\mathbb{C})$ 不変性のみでは決定できない．

このように 1，2 点及び 3 点関数の関数形は，定数因子を除き共形不変性のみで完全に決まってしまう点に注目しよう．

(4)　一般の N 点関数

最後に一般の N 点関数に対し，$SL(2,\mathbb{C})$ 不変性から導かれる事実を紹介しておこう *12．N 点関数の正則部分は次の形を持つ；

$$G(z_1,z_2,\cdots,z_N) = \sum_{i<j}(z_i-z_j)^{-\gamma_{ij}}Y(x_{ij}^{kl}). \tag{1.77}$$

ここで γ_{ij} は，

$$\sum_{j\neq i}\gamma_{ij} = 2h_i, \quad i=1,2,\cdots,N \tag{1.78}$$

を満たす．x_{ij}^{kl} は，

$$x_{ij}^{kl} = \frac{(z_i-z_j)(z_k-z_l)}{(z_i-z_k)(z_j-z_l)} \tag{1.79}$$

---

*12　ここでの問題はもともとは [20] で論じられた．4 点関数については，たとえば [7] に詳しい導出が解説してある．

と定義され，(z_i, z_j, z_k, z_l) の「交差比」(cross ratio) と呼ばれる．そして $Y(x_{ij}^{kl})$ は $N-3$ 個の変数 $\{x_{ij}^{kl}\}$ の正則関数である．交差比 x_{ij}^{kl} は，$SL(2,\mathbb{C})$ 変換 $z \to w = (az+b)/(cz+d)$ によって不変である点に注意しよう；

$$\frac{(z_i - z_j)(z_k - z_l)}{(z_i - z_k)(z_j - z_l)} = \frac{(w_i - w_j)(w_k - w_l)}{(w_i - w_k)(w_j - w_l)}. \tag{1.80}$$

特に 4 点関数は次の形に書かれる；

$$\left\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1)\Phi_2(z_2, \bar{z}_2)\Phi_3(z_3, \bar{z}_3)\Phi_4(z_4, \bar{z}_4) \right\rangle$$
$$= \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{-h_i - h_j + \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{4} h_l} \prod_{i<j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{-\bar{h}_i - \bar{h}_j + \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{4} \bar{h}_l} F(x, \bar{x}).$$

ここで 1 成分だけの交差比を，

$$x = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} \tag{1.81}$$

とおいた．

1.6 演算子形式

今まで経路積分の方法に基づいて共形場の理論を議論してきた．相関関数は特定の積分測度のもとでの期待値として定義された．しかし共形代数の表現論を用いた議論を行う場合には演算子形式に移ることが有効となる．この節では 2 次元の共形場の理論における経路積分と演算子形式の関係を明らかにしよう．

1.6.1 動径量子化

経路積分では時間座標と空間座標に本質的な区別はない．一方，演算子形式においては d 次元の時空の多様体 M^d は時間方向とこれに直交する $d-1$ 次元の超局面 N^{d-1} に分解され，時間の増加する方向に演算子積は順序づけられる．各時間スライス N にひとつのヒルベルト空間 $\mathcal{H}_N$ が対応し，量子論的な場の演算子はこれらのヒルベルト空間で定義された線形写像である．

2 次元の時空 $\mathbb{R}^2$ を考え，これを複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視しよう．複素座標を

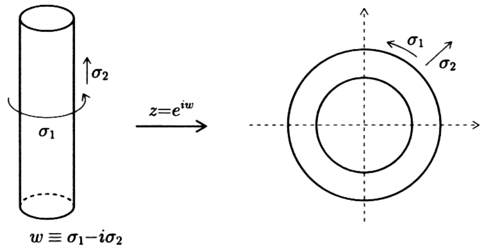


図 1.3 動径量子化
共形写像 $z=e^{iw}\equiv e^{\sigma_2+i\sigma_1}$ によって，シリンダーの領域が複素 z-平面に写像される．

$z=x_1+ix_2$ とするとき，x_1(あるいは x_2)方向を空間方向，x_2(あるいは x_1)方向を(ユークリッド)時間方向ととる「垂直量子化」(vertical quantization)が普通であるが，共形場の理論では動径 $r\,(\equiv e^{\sigma_2})$ 方向を時間，角度 $\theta\,(\equiv\sigma_1)$ 方向を空間にとるのが便利である．このように時間軸を取って演算子形式で量子化を行うことを**動径量子化**(radial quantization)と呼ぶ．すなわち動径量子化では，$r\,(\equiv e^{\sigma_2})=0$ が時間 $=-\infty$，$r=\infty$ が時間 $=+\infty$ に相当する(図 1.3 参照)．

共形場の理論で動径量子化が便利なのは，すべての時間スライスにおいて空間方向が「コンパクト化」(周期的境界条件を持つこと)されており，スペクトルが離散的になるためである*13．垂直量子化では各時間スライスにおいて空間方向が無限に長いため，運動量はいくらでも小さな値が可能である．共形場理論のように零質量の場の量子論では，この場合はゼロエネルギー準位に無限縮退が存在し，取り扱いに技術的困難がある．

この点を少し違った角度から述べてみよう．共形写像 $z=e^{iw}$ によって垂直量子化の複素座標 $(w\equiv\sigma_1-i\sigma_2)$ と動径量子化の複素座標 $(z\equiv re^{i\theta})$ は移り合うので，両者は単純に等価であると考えたくなるかもしれない．しかし，共形写像 $z=e^{iw}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 上 1 対 1 に定義されているわけではなく，実際には無限に長いシリンダー状の領域；

*13 弦理論を勉強している読者のためのコメント：ここで言う離散スペクトルはあくまで世界面の意味であり，後に現れるビラソロ代数やカレント代数が離散的なモードで生成されるという事実に対応している．ターゲット時空が非コンパクトである場合は，ターゲット時空の意味でのエネルギーや運動量はやはり連続スペクトルを持ち，この両者は厳密に区別して考えないといけない．

$$\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}, \quad (\sigma_1 \cong \sigma_1 + 2\pi),$$

を複素平面に写像する(図 1.3 参照)．すなわち，

動径量子化とは，シリンダー上で通常の時間軸で量子化を実行することと等価である．

と述べることができる．離散スペクトルの存在はシリンダー上の理論と考えると自然に理解されるであろう．本章でこの後解説する演算子積展開(OPE)や演算子の交換関係，局所場の相関関数といったテーマを論ずるには複素平面上で動径量子化を用いる方が有利であり，一方，共形場理論のヒルベルト空間の構造などを調べるにはシリンダー上で議論する方がわかりやすいかもしれない．

動径量子化では局所場の複素変数 z の大きさ $|z|$ が大きい(小さい)ほど，遅い(早い)時間に働く演算子とみなされる．たとえば C_1 と C_2 をそれぞれ半径 $\{|z|=r_1\}$ と $\{|z|=r_2\}$ の円周としよう(図 1.3 参照)．それぞれの時間スライスに定義された 2 つの演算子を考えよう；

$$\hat{\mathcal{O}}_1 = \oint_{C_1} \hat{A}(z)dz, \qquad \hat{\mathcal{O}}_2 = \oint_{C_2} \hat{B}(w)dw. \tag{1.82}$$

場の量子論で標準的に考えるファインマンのグリーン関数(相関関数)は局所演算子を時間順序で過去から未来に並べて真空期待値を取ったものである．ここで時間順序に相当しているのは**動径順序**(radial ordering)であり，通常の相対論的場の理論と全く同様に以下のように定義される；

$$R[A(z)B(w)] \equiv \begin{cases} A(z)B(w) & (|z| > |w|), \\ \epsilon(A,B)\, B(w)A(z) & (|z| < |w|). \end{cases} \tag{1.83}$$

ここで，$\epsilon(A,B)$ は統計因子であり，局所場 $A(z)$, $B(z)$ がともにフェルミオニックな場である場合のみ -1 をとり，それ以外は $+1$ と約束する．

共形場理論の多くの文献では，次項 1.6.2 で扱う演算子積展開の際，動径順序の記号は省略されていることが多いので注意が必要である．

動径量子化の利点として，交換関係を計算する便利な「トリック」について

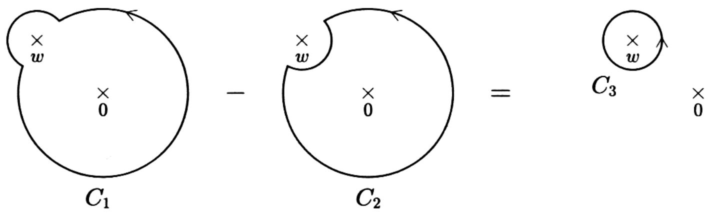


図 1.4　交換関係を計算するための積分路

触れておこう．今，2 つの共形場 $A(z)$, $B(w)$ があり，交換関係

$$[\oint_C \frac{dz}{2\pi i} A(z),\ B(w)],$$

の計算をしたいとする．既に 1.4 節で見たように，共形場理論では，特異性が現れる $z{=}w$ の点を除いて積分路 C を自由に変形できるので，この交換関係を次のように書き換えることができる；

$$\begin{aligned}[\oint_C \frac{dz}{2\pi i} A(z),\ B(w)] &= \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} A(z)\,B(w) - \oint_{C_2} \frac{dz}{2\pi i} B(w)\,A(z) \\ &= \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} R[A(z)B(w)] - \oint_{C_2} \frac{dz}{2\pi i} R[A(z)B(w)] \\ &= \oint_{C_3} \frac{dz}{2\pi i} R[A(z)B(w)].\end{aligned}$$

ここで，積分路 C_1 上では $|z|>|w|$，C_2 上では $|z|<|w|$ であるとし，C_3 は w を囲む十分小さな閉曲線であるとする（図 1.4 を参照）．1 行目と 3 行目はコーシーの定理による積分路の変形，2 行目では動径順序の定義を用いた．すなわち，

$$[\oint_C \frac{dz}{2\pi i} A(z),\ B(w)] = \oint_w \frac{dz}{2\pi i} R[A(z)B(w)] \equiv \mathrm{Res}_{z=w}[A(z)B(w)], \tag{1.84}$$

という公式が得られる（最後の表式では留数の記号の中の動径順序の記号を省略した）．このように，共形場の交換関係が OPE の留数を調べるだけで求められるという点が動径量子化のひとつのゴリヤクである．

1.6.2 演算子積展開

一般の d 次元の場の理論で N 点関数を考えよう；

$$\Big\langle \phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\phi_3(\boldsymbol{r}_3)\cdots\phi_N(\boldsymbol{r}_N)\Big\rangle. \tag{1.85}$$

今，距離 $|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$ が他の距離 $|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|$ に比べてはるかに小さいときを考える．この場合演算子 $\phi_3(\boldsymbol{r}_3),\cdots,\phi_N(\boldsymbol{r}_N)$, から見ると $\phi_1(\boldsymbol{r}_1)$ と $\phi_2(\boldsymbol{r}_2)$ は非常に近距離にあるためこの 2 つの演算子はひとつに「溶け合って」何か別の局所的な演算子 $\phi'(\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2})$ で表されると考えられる．すなわち

$$\Big\langle \phi'\left(\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}\right)\phi_3(\boldsymbol{r}_3)\cdots\phi_N(\boldsymbol{r}_N)\Big\rangle \tag{1.86}$$

が N 点関数(1.85)のよい近似を与えるとしよう．演算子 ϕ' を決めることは 2 つの演算子 ϕ_1, ϕ_2 の「融合」の仕方を記述することに相当し，ちょうど電磁気学において電荷分布の多重極展開を求めることによく似ている．

今，$\mathcal{A}$ を全ての局所的な演算子からなるベクトル空間としよう．その基底として演算子の組 $\{\phi_i\}_{i\in I}$ を考える．集合 $\mathcal{A}$ は無限次元のベクトル空間である．特に $\phi\in\mathcal{A}$ ならばその全ての微分 $\partial_\mu\phi$, $\partial_\mu\partial_\nu\phi$ も $\mathcal{A}$ に含まれる．演算子の融合(fusion)は集合 $\mathcal{A}$ の間に積を定義する；

$$\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}.$$

融合された演算子 $\mathcal{A}$ は基底ベクトル $\{\phi_i\}_{i\in I}$ に展開される；

$$\phi_i(\boldsymbol{r}_1)\phi_j(\boldsymbol{r}_2)=\sum_{k\in I}D_{ij}^k(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\phi_k(\boldsymbol{r}_2). \tag{1.87}$$

これを**演算子積代数**(OPA)あるいは **演算子積展開**(OPE)と呼ぶ．

方程式(1.87)は演算子としての恒等式である．すなわち任意の相関関数に関して

$$\Big\langle \phi_i(\boldsymbol{r}_1)\phi_j(\boldsymbol{r}_2)\cdots\Big\rangle=\sum_{k\in I}D_{ij}^k(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\Big\langle \phi_k(\boldsymbol{r}_2)\cdots\Big\rangle \tag{1.88}$$

が成り立つ．したがって原理的には任意の N 関数はこの関係を用いて $N-1$ 点関数に帰着することができる．

2 次元の共形場の理論に戻ろう．OPE は

$$\phi_i(z)\phi_j(w) = \sum_{k\in I} D_{ij}^k(z-w)\phi_k(w) \tag{1.89}$$

の形を持つ．ここで左辺は動径順序の意味で理解する．正則な座標変換 $z\mapsto \tilde{z}=f(z)$ のもとで(1.89)の両辺は等しい変換性を持たなければならない．特に次元解析から演算子積展開の展開係数 $D_{ij}^k(z-w)$ の形は

$$D_{ij}^k(z-w) = \frac{C_{ij}^k}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k}} \tag{1.90}$$

のように決定される．ここで C_{ij}^k はある定数である．したがって，原理的には相関関数の全ての情報はスケーリング次元 $\{h_i\}$ と OPE の展開係数 $\{C_{ij}^k\}$ が担っていると言える．しかし実際上 C_{ij}^k を直接決定することは難しい．そこで，まずより簡単な問題—— $T(z)$ と他の演算子との OPE を決定することを議論しよう．

1.6.3 エネルギー・運動量テンソル $T(z)$ を含む演算子積展開

$\Phi(z,\bar{z})$ を共形ウェイト $(h,\bar{h})$ を持つプライマリー場であるとする．(1.31)によると，無限小共形変換 $\epsilon(z)\equiv\epsilon^z(z)\partial_z$ による $\Phi(z,\bar{z})$ の変換則は，

$$\delta_\epsilon\Phi(z,\bar{z}) = \epsilon^z\partial_z\Phi(z,\bar{z})+h\left(\partial_z\epsilon^z\right)\Phi(z,\bar{z}), \tag{1.91}$$

と表される．したがって，公式(1.55)により，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_w dz\,\epsilon^z(z)T(z)\Phi(w,\bar{w}) = \epsilon^w\partial_w\Phi(w,\bar{w})+h\left(\partial_w\epsilon^w\right)\Phi(w,\bar{w}), \tag{1.92}$$

が得られる．留数定理を用いると，(1.92)は次の形の OPE を与えることがわかる；

$$T(z)\Phi(w,\bar{w}) = \frac{h\Phi(w,\bar{w})}{(z-w)^2}+\frac{\partial_w\Phi(w,\bar{w})}{z-w}+\cdots. \tag{1.93}$$

ここで $\cdots$ は $z-w$ について正のべきを持つ正則な項であり，近距離 $z\approx w$ のふるまいには効かない．このため共形場理論では，近距離での特異性にのみ着目し，(1.93)を，

$$T(z)\Phi(w,\bar{w}) \sim \frac{h\Phi(w,\bar{w})}{(z-w)^2}+\frac{\partial_w\Phi(w,\bar{w})}{z-w}, \tag{1.94}$$

と書く習慣がある．(1.94)はプライマリー場を特徴付ける重要な関係式である．

OPE(1.93)は，次のように共形ワード・高橋恒等式(1.50)から直接導くこともできる．$\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)$ を共形ウェイト $(h_i,\bar{h}_i)$ を持つプライマリー場であるとする．$^\forall w\in\Sigma,\ w\neq z_i,(^\forall i)$ とおき，$\epsilon(z)\equiv\epsilon^z(z)\partial_z,\quad \epsilon^z(z)\equiv\dfrac{1}{z-w}$，と選ぶと，デルタ関数の公式 $\partial_{\bar{z}}\dfrac{1}{z-w}=\pi\delta^2(z-w,\bar{z}-\bar{w})$ を用いることによって(1.50)が次の恒等式に帰着することがわかる；

$$\left\langle T(w)\ \prod_{i=1}^{N}\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\right\rangle$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left\langle\Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\left\{\frac{h_i}{(w-z_i)^2}\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)+\frac{1}{w-z_i}\partial_{z_i}\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)\right\}\cdots\Phi_N(z_N,\bar{z}_N)\right\rangle. \tag{1.95}$$

これはエネルギー・運動量テンソル $T(w)$ が，各プライマリー場 $\Phi_i(z_i,\bar{z}_i)$ に対し，OPE(1.93)によって作用することを示している．

エネルギー・運動量テンソル $T(z)$ 同士の OPE も，既に導いたワード・高橋恒等式(1.68)から同様に求めることができる．本項の議論と同様に，(1.68)は演算子間の関係式

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_w dz\,\epsilon^z(z)T(z)T(w)=\delta_\epsilon T(w)\equiv\epsilon^z\partial_z T+2(\partial_z\epsilon^z)T+\frac{c}{12}\partial_z^3\epsilon^z, \tag{1.96}$$

と再解釈することができる．さらに留数定理と組み合わせると，$T(z)T(w)$ の OPE の公式として

$$T(z)T(w)\sim\frac{c/2}{(z-w)^4}+\frac{2}{(z-w)^2}T(w)+\frac{1}{z-w}\partial_w T(w), \tag{1.97}$$

が得られる．読者は(1.96)と(1.97)が等価であることをチェックしてほしい．あるいは，上の議論と同様に(1.68)において $\epsilon^z(z)\equiv\dfrac{1}{z-z'}$ とおくことによっても同じ結果を直接導くことができる．

公式(1.97)は共形場理論において最も基礎的な公式のひとつであり，1.7節で活躍する．$T(z)$ とプライマリー場の OPE (1.93)と比較すると，右辺の $T(z)$ の線形項は，$T(z)$ が共形ウェイト 2 の準プライマリー場であることを

表している．右辺の第 1 項がアノマリー項であり，カレント代数の用語では「シュウインガー項」に対応している．スケール不変性の仮定と次元解析から(1.97)のアノマリー項が $\sim 1/(z-w)^4$ の座標依存性を持つことは容易に見抜けるであろう．その係数とトレース・アノマリー(1.61)の間の厳密な関係を導くことが非自明であった．

1.7　ビラソロ代数

この節ではいよいよ 2 次元の共形場理論の代名詞とも言うべきビラソロ代数について解説しよう．量子力学では角運動量演算子や電荷演算子のように，物理系の対称性に付随する保存量が，対応する無限小変換の生成子としての役割を果たす．まずは無限小共形変換の生成子としてビラソロ演算子を導入するところから始めよう．

1.7.1　ビラソロ演算子

以下，正則部分のみに着目する．$u(z) \equiv u^z(z)\partial_z$ を任意の無限小共形変換(局所的な正則ベクトル場)としよう．場の量子論の一般論にならい，共形ウェイト h のプライマリー場 $\Phi(z)$ に対し，

$$[Q(u),\, \Phi(z)] = -\delta_u \Phi(z) \equiv -u^z(z)\partial_z \Phi(z) - h(\partial_z u^z(z))\Phi(z), \qquad (1.98)$$

を満たす演算子として無限小共形変換の生成子を定義する．右辺の符号が不自然に見えるかもしれないが，これは次の事情による；

別の無限小共形変換 $v(z) \equiv v^z(z)\partial_z$ を用意して，2 重の交換子 $[Q(u),\, [Q(v),\, \Phi(z)]]$ を計算してみると，

$$[Q(u),\, [Q(v),\, \Phi(z)]] = [Q(u),\, -\delta_v \Phi(z)] = (-\delta_v)(-\delta_u)\Phi(z) = \delta_v \delta_u \Phi(z)$$

(δ_v と δ_u の順序に注意)．したがって，交換子のヤコビ律を用いると，

$$[[Q(u),\,Q(v)],\,\Phi(z)] = [Q(u),\,[Q(v),\,\Phi(z)]] - [Q(v),\,[Q(u),\,\Phi(z)]]$$
$$= (\delta_v\delta_u - \delta_u\delta_v)\,\Phi(z)$$
$$= -[\delta_u, \delta_v]\Phi(z) = -\delta_{[u,v]}\Phi(z) \qquad (1.99)$$

が成立する．最終行では，容易にチェックできる恒等式[*14]

$$[\delta_u, \delta_v] = \delta_{[u,v]}, \qquad (1.100)$$

を用いた．この恒等式の証明は読者の練習問題とする．以上より，

$$[[Q(u),\,Q(v)],\,\Phi(z)] = [Q([u,v]),\,\Phi(z)],$$

が成立し，

$$u(z) \longmapsto Q(u),$$

は交換関係を保つ「自然」な対応になっていることが結論される．(1.99)を導出する際に，(1.98)の負号が効いていたことに注意しよう．これが $Q(u)$ の定義として(1.98)を採用した理由である．

より精密に述べると，演算子 $Q(u)$ には勝手な c 数を加えておいても，定義式(1.98)は満たされるため，一般に，

$$[Q(u),\,Q(v)] = Q([u,v]) + C(u,v), \qquad (1.101)$$

という交換関係を満たすことがわかる．ここで，$C(u,v) = -C(v,u)$ は c 数であり，全ての演算子と可換である．こうした項を**中心拡大**と呼ぶ．

具体的に生成子 $Q(u)$ はどのように表されるであろうか？ 公式(1.84)と共形ワード・高橋恒等式から得られた(1.55)からただちに，

$$Q(u) = -\frac{1}{2\pi i}\oint dz\, u^z(z) T(z), \qquad (1.102)$$

であることがわかる．ここで積分路は省略されているが，原点 $z=0$ を囲む任意の閉曲線と考えてよい．被積分関数は(generic な点においては)正則である

---

*14　微分幾何ではリー微分とベクトル場の交換子(リー括弧)に対するよく知られた恒等式に相当する．

ため，積分路は自由に変形することが許される．この事実は，もちろん $Q(u)$ が共形変換 $u \equiv u^z(z)\partial_z$ に対するネーター電荷となっているためであり，古典的なネーターの定理に対応している．また，$T(z) \equiv T_{zz}(z)$ であったことを思い出すと，(1.102)で積分される 1-形式は，$u^z(z)T_{zz}dz$ と正しく「テンソルの足がつぶされて」いるので，表式(1.102)は，座標系の選び方によらず意味を持つと期待される*15.

特に，以前導入した無限小共形変換の基底 $\ell_n \equiv -z^{n+1}\partial_z$, $(n \in \mathbb{Z})$ に対して，

$$L_n \equiv Q(\ell_n) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, z^{n+1}T(z), \quad ({}^{\forall}n \in \mathbb{Z}) \tag{1.103}$$

と表すことにしよう．これを**ビラソロ演算子**と呼ぶ．言い換えれば，ビラソロ演算子とはエネルギー・運動量テンソル $T(z)$ の $z=0$ におけるローラン展開の係数であると述べることができる；

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}. \tag{1.104}$$

また，$u^z(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \ell_n \equiv -\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n z^{n+1}$ のとき，

$$Q(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n L_n, \tag{1.105}$$

と表される．

ビラソロ演算子の交換関係について考えてみよう．まず，(1.92)で $e^z(z) = z^{n+1}$ とおき，公式(1.84)を適用することにより，ビラソロ演算子とプライマリー場の交換関係として

$$[L_n, \Phi(z)] = z^{n+1}\partial_z\Phi(z) + (n+1)hz^n\Phi(z), \tag{1.106}$$

を得る．特に，$[L_0, \Phi(z)] = h\Phi(z)$, $[L_{-1}, \Phi(z)] = \partial_z\Phi(z)$ の関係に注意しよう．

ビラソロ演算子同士の交換関係を求めるには，再び公式(1.84)と OPE (1.97)を用いればよい．留数定理を順番に適用することにより，次の結果が得られる；

*15　ただし，アノマリーの存在のため $T(z)$ は準プライマリー場であって完全な「テンソル」ではないので注意が必要である．この点は後で精密に議論する．

$$
\begin{aligned}
[L_m,\, L_n] &= \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{2\pi i}\, z^{m+1} w^{n+1}\, T(z)T(w) \\
&= \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} \oint_w \frac{dz}{2\pi i}\, z^{m+1} w^{n+1} \left[\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \right] \\
&= \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} \left[\frac{c}{2} \cdot \frac{1}{3!}(m+1)m(m-1)w^{m+n-1} + 2(m+1)w^{m+n+1}T(w) \right. \\
&\qquad \left. + w^{m+n+2} \left(-\sum_{k\in\mathbb{Z}} (k+2) \frac{L_k}{w^{k+3}} \right) \right] \\
&= \frac{c}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} + \{2(m+1)-(m+n+2)\}\, L_{m+n} \\
&= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}. \qquad (1.107)
\end{aligned}
$$

上の計算で，w の積分路は原点 $w=0$ を囲む任意の閉曲線である．一方，z の積分路は w を囲む十分小さな閉曲線に選んでおり $z=w$ の留数を拾っている．

こうしてビラソロ演算子は交換関係について閉じた代数を生成する．この代数を**ビラソロ代数**(Virasoro algebra)と呼ぶ．(1.101)から期待されるように，最後の表式の右辺第1項は正則ベクトル場 $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ のなす無限次元リー代数(1.19)と同じ形をしている．一方，第2項は(1.101)の中心拡大 $C(u,v)$ に対応している．このためトレース・アノマリーの大きさを表すパラメータ c は**中心電荷**(central charge)と呼ばれ，本書でも以下この用語を用いる．

1.7.2 ビラソロ代数

ビラソロ代数についてもう少し詳しく解説しよう．改めて定義を述べると，ビラソロ代数とは，無限個の生成子 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と中心拡大の要素 c とから生成される無限次元のリー代数であり，次の交換関係によって定義される；

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}, \\
[L_n, c] &= [c, c] = 0. \qquad (1.108)
\end{aligned}
$$

前節までは，c をパラメータとして扱ったが，リー代数の表現論の立場からは，少し抽象的に中心(center)の生成元(全ての生成元と可換な元)と定義しておいた方が都合がよい．

ビラソロ代数の重要事項について補足しておく；

(1) 大域的共形変換のなす $SL(2,\mathbb{C})$ 部分代数

1.2 節で解説したように，$\{\ell_n : n=1,0,-1\}$ はリーマン球面 $\mathbb{CP}^1$ 全体で正則な大域的共形変換を与えている．容易に確かめられるように，対応するビラソロ演算子 $\{L_n : n=1,0,-1\}$ は，ビラソロ代数の部分代数をなす；

$$[L_0,\, L_{\pm 1}] = \mp L_{\pm 1}, \quad [L_1,\, L_{-1}] = 2L_0. \tag{1.109}$$

ここで，中心項がゼロとなっている点が重要である．部分代数(1.109)は量子力学の角運動量の理論でおなじみの $SL(2,\mathbb{C})$ リー代数であり，幾何学的には，

$$L_{-1} \longleftrightarrow \text{並進}, \quad L_0 \longleftrightarrow \text{スケール変換と回転}, \quad L_1 \longleftrightarrow \text{特殊共形変換},$$

という対応である．また(1.109)に対応する $SL(2,\mathbb{C})$ リー群は既に述べたように 1 次分数変換としてリーマン球面 $\mathbb{CP}^1$ 上に作用する．

(2) ヤコビ律と中心拡大

既に述べたようにビラソロ代数(1.108)は，代数(1.19)の中心拡大になっている．上の議論ではワード・高橋恒等式(1.68)から中心拡大項(シュウインガー項)を直接導いたが，次の点をコメントしておくのは有益であろう．実は，リー代数のヤコビ律の要請から，(1.19)の最も一般の中心拡大の形は $(am^3+bm)\delta_{m+n,0}$ となることが示される．ここで a, b は定数であるが，m に比例する項の係数 b の値は，L_0 を定数だけずらして再定義することによって任意の値に合わせることができる．そこで，$a=-b$ となるように選んで中心拡大項が m^3-m に比例するように定めると，上で述べたように大域的共形変換 $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ が中心拡大を持たず，$SL(2,\mathbb{C})$ 部分代数を生成する．共形場理論が無矛盾であるためには，大域的共形変換に対し不変な真空が定義できなければならず，大域的共形変換の代数が中心拡大を持たないことはその点を保証している．最後に中心拡大の係数 a から規格化の因子 $\dfrac{1}{12}$ をくくりだすと(1.108)が再現される．

1.7.3　共形場の変換公式

前項で導いた交換関係(1.106)や(1.107)などは，無限小共形変換が共形場にどのように作用するかを表している公式と読むことができる．それでは，有限の(局所)共形変換(=局所的に正則な微分同相写像)：$z \longmapsto w \equiv F(z)$ によって，共形場はどのように変換されるであろうか？　すなわち，交換関係(1.106)，(1.107)の「積分形」を求めてみたい．

まず，プライマリー場 $\Phi(z)$ の共形変換則は簡単である．共形変換 F に付随するユニタリ変換 $U(F)$ が存在すると仮定しよう．$U(F)$ は次のように共形ウェイト h のプライマリー場 $\Phi(z)$ に作用する；

$$U(F)\Phi(z)U(F)^{-1} = F^*\Phi(z) \equiv \Phi(F(z)) \left(\frac{dF}{dz}\right)^h . \qquad (1.110)$$

無限小変換との対応は以下のようにすればよい．量子力学でよく知られた関係により，$F(z)=z+\epsilon^z(z)+O((\epsilon^z)^2)$, ($\epsilon \equiv \epsilon^z(z)\partial_z$ は無限小共形変換)に対し，

$$U(F) = \exp\left[\oint \frac{dz}{2\pi i}\, \epsilon^z(z)T(z)\right], \qquad (1.111)$$

と表すことができ，(1.110)の両辺を ϵ^z の 1 次まで展開すると，(1.92)と等価である関係式；

$$\left[\oint \frac{dw}{2\pi i}\, \epsilon^w(w)T(w),\, \Phi(z)\right] = \delta_\epsilon \Phi(z) \equiv \epsilon^z(z)\partial_z\Phi(z)+h\left(\partial_z\epsilon^z(z)\right)\Phi(z), \qquad (1.112)$$

が導かれる．さらに $\epsilon^z(z)=z^{n+1}$ とおくと(1.106)を再現する．

公式(1.110)を座標変換の立場から再解釈しておこう．今，2 つの複素座標 z, z' の間の座標変換が正則写像 $z'=F(z)$ で与えられているとしよう．本章の前半で述べたように，プライマリー場の座標変換則は，コンパクトに

$$\Phi'(z')(dz')^h = \Phi(z)(dz)^h,$$

と表すことができる．公式(1.110)を用いて言い換えると，共形変換によるプライマリー場の座標変換則を，

$$\Phi'(z') = U(F)^{-1}\Phi(F(z))U(F), \qquad (1.113)$$

あるいは，$z'=F(z)$ より両辺の引数を省略して簡単に

$$\Phi' = U(F)^{-1}\Phi U(F), \tag{1.114}$$

と書き表すことができる．読者は(1.110)と(1.114)が形式的に「逆回転」をしているように見える理由を考えてみて欲しい．

次に，より非自明なエネルギー・運動量テンソル $T(z)$ の変換則を考えてみよう．そのためには既に無限小共形変換(1.66)で現れているアノマリーの効果を正しく取り入れなければならない．そこで，求める共形変換則を，(1.110)の拡張として，

$$U(F)T(z)U(F)^{-1} = T(F(z))\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 + \Theta[F](z), \tag{1.115}$$

の形を仮定し，アノマリー項 $\Theta[F](z)$ を求めてみよう．計算の詳細は読者の練習問題とするが，次の論法により $\Theta[F](z)$ は一意的に決定することができる．まず，$\Theta[F](z)$ に対する要請を書き出してみよう；

(i) $F(z)=z+\epsilon^z(z)+O((\epsilon^z)^2)$ とおいたとき，$T(z)$ の無限小共形変換の公式((1.96)と等価)；

$$\begin{aligned}\left[\oint \frac{dw}{2\pi i}\,\epsilon^w(w)T(w),\,T(z)\right] &= \delta_\epsilon T(z)\\ &\equiv \epsilon^z(z)\partial_z T(z)+2\left(\partial_z\epsilon^z(z)\right)T(z)+\frac{c}{12}\partial^3\epsilon^z(z),\end{aligned} \tag{1.116}$$

を再現する．

(ii) 共形変換 F, G の合成変換 $F\circ G$ に対し，$U(F\circ G)=U(F)U(G)$ が成立するはずであるから，汎関数 Θ に対する「コサイクル条件」；

$$\Theta[F\circ G](z) = \left(\frac{dG}{dz}\right)^2\Theta[F](G(z))+\Theta[G](z), \tag{1.117}$$

が要請される．

(iii) 大域的な共形変換はアノマリー・フリーであるため，F が大域的共形変換の場合，

$$\Theta[F](z) \equiv 0, \tag{1.118}$$

となる．

まず，要請(i)より $\Theta[F](z)$ は，高々 z の 3 階微分までを含む局所的に正則な c 数であることがわかる．次に，コサイクル条件(1.117)と(1.118)を組み合わせると，

$$\Theta[F\circ T_a] = \Theta[T_a\circ F] = \Theta[F], \quad (T_a(z) \equiv z+a, \ \ {}^{\forall}a \in \mathbb{C})$$
$$\Theta[F\circ D_a](z) = a^2\Theta[F], \quad \Theta[D_a\circ F] = \Theta[F], \quad (D_a(z) \equiv az, \ \ {}^{\forall}a \in \mathbb{C}),$$

が結論されるので，$\Theta[F](z)$ の一般形は，A, B を定数として，

$$\Theta[F](z) = A\frac{F^{(3)}(z)}{F'(z)} + B\left(\frac{F^{(2)}(z)}{F'(z)}\right)^2,$$

となることがわかる．ここで，$F(z)=\dfrac{1}{z}$ とおいたとき要請(1.118)より $\Theta[F] \equiv 0$ となるので，$B=-\dfrac{3}{2}A$ と求められる．さらに，無限小共形変換則との無矛盾性(consistency)より，$A=\dfrac{c}{12}$ となる．このようにして求められた $\Theta[F]$ がコサイクル条件(1.117)を満足することは，直接計算により容易にチェックできる．以上より $T(z)$ の共形変換則は次の公式にまとめられる($w \equiv F(z)$)；

$$U(F)T(z)U(F)^{-1} = T(F(z))\left(\frac{dF}{dz}\right)^2 + \frac{c}{12}S[w,z],$$
$$S[w,z] \equiv \frac{d^3w/dz^3}{dw/dz} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2w/dz^2}{dw/dz}\right)^2. \tag{1.119}$$

ここで，$S[w,z]$ は，w の z による**シュワルツ微分**(Schwarzian)と呼ばれる．

応用上は $T(z)$ の共形変換による座標変換則も重要であり，プライマリー場の場合の公式(1.114)と同様に，共形座標変換 $z'=F(z)$ に対し，

$$T' = U(F)^{-1}TU(F), \tag{1.120}$$

と定義される．公式(1.119)を用いてあらわに書き下すと，

$$T'(z') = T(z)\left(\frac{dz}{dz'}\right)^2 + \frac{c}{12}S[z,z'], \tag{1.121}$$

という公式が得られる．アノマリー項の存在のため，一般の局所共形変換に対しては $T(z)$ はテンソル場の変換性を示さない点を再び強調しておこう．

以下，$T(z)$ の共形座標変換の例を述べよう．

例 1

リーマン球面 $\mathbb{CP}^1$ において無限遠点 $z{=}\infty$ の座標近傍に移るには，$w{=}\dfrac{1}{z}$ という大域的な共形座標変換を行う．

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}, \quad S[w,z] = 0,$$

より，複素座標 w に対するエネルギー・運動量テンソル $T^{(w)}(w)$ は，$T(z) \equiv \sum_n \dfrac{L_n}{z^{n+2}}$ に対して，

$$T^{(w)}(w) = z^4 T(z) \equiv \frac{1}{w^4} T\left(\frac{1}{w}\right) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n w^{n-2}, \tag{1.122}$$

と計算される．この結果は次節で用いる．

例 2

シリンダーから $\mathbb{CP}^1$ への共形変換は，正則写像 $z{=}e^w$ で与えられる．

$$\frac{dz}{dw} = e^w \equiv z, \quad S[z,w] = -\frac{1}{2},$$

となるから，シリンダー上(w-座標)のエネルギー・運動量テンソルを，

$$T^{(\mathrm{cyl})}(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n^{(\mathrm{cyl})}\, e^{nw}, \tag{1.123}$$

とすると，共形座標変換則(1.121)より，

$$T^{(\mathrm{cyl})}(w) = z^2 T(z) - \frac{c}{24},$$

となる．これより，ビラソロ演算子の間の関係式：

$$L_n^{(\mathrm{cyl})} = L_n - \frac{c}{24}\delta_{n,0}, \tag{1.124}$$

が得られる．これは 5 章で用いられる重要な関係式である．

1.7.4 共形不変な真空

経路積分から演算子形式への読み替えを行うには，まずは適切な真空の状態を定義しなければならない．演算子形式では相関関数は，

$$\left\langle \Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle = \langle 0|R\left(\Phi_1(z_1)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_N(z_N)\right)|0\rangle, \quad (\langle 0|0\rangle = 1)$$

と書かれることを思い出そう．ここで $R(\cdots)$ は動径順序を表す．1.4.1 項で述べたように，局所場の挿入点 z_i 以外の点ではエネルギー・運動量テンソル $T(z)$ は正則な場としてふるまう．よって，原点 $z{=}0$ に局所場 $\Phi_i(z_i)$ が挿入されていなければ，状態 $T(z)|0\rangle$ は $z{=}0$ のまわりでテイラー展開されるはずである．あるいは，コーシーの定理から任意の $z{=}0$ のまわりで正則なベクトル場 $u(z)\equiv u^z(z)\partial_z$ に対し，

$$\oint_0 dz\, u^z(z)T(z)\,|0\rangle = 0,$$

が成立すると考えてもよい．したがって真空 $|0\rangle$ の満たすべき条件として，

$$L_n|0\rangle \equiv \oint_0 \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1}T(z)\,|0\rangle = 0, \quad ({}^\forall n \geq -1), \tag{1.125}$$

が得られる．

全く同様に，$z{=}\infty$ のまわりの正則性から，任意の $z{=}\infty$ のまわりで正則なベクトル場 $u(z)$ に対し，

$$\langle 0|\oint_\infty dz\, u^z(z)T(z) = 0,$$

でなければならないので，前節の $z{=}\infty$ の近傍で正則なベクトル場に関する考察を思い出すと*16，

$$\langle 0|\,L_n \equiv -\langle 0|\oint_\infty \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1}T(z) = 0, \quad ({}^\forall n \leq 1), \tag{1.126}$$

が成立する．あるいは，共形座標変換 $w{=}\dfrac{1}{z}$ のもとで，(1.122)が成り立つの

*16 コーシーの定理を用いて，積分路を $z{=}\infty$ を囲むように変形するとき，向きが逆になることに注意．

で，w=0 における正則性より，

$$\langle 0|\, L_n \equiv \langle 0| \oint_0 \frac{dw}{2\pi i}\, w^{-n+1} T^{(w)}(w) = 0, \quad ({}^\forall n \leq 1), \tag{1.127}$$

と考えてもよい．

(1.125) と (1.126) を組み合わせると，大域的共形変換 $L_{\pm 1}$, L_0 については，

$$L_n|0\rangle = \langle 0|L_n = 0, \quad (n = 1, 0, -1), \tag{1.128}$$

となることがただちにわかる．このように共形場理論では大域的な共形対称性は完全に保たれていると言える．それ以外のビラソロ演算子 L_n (${}^\forall n \neq 1, 0, -1$) は，必ず「in-vacuum」$|0\rangle$ か「out-vacuum」$\langle 0|$ のどちらか一方は不変にしない．この事実はビラソロ代数(1.108)のシュウインガー項の存在と無関係ではない．実際，この項の存在のために，$c \neq 0$ である限り矛盾無く拘束条件 $L_n|0\rangle = \langle 0|L_n = 0$, (${}^\forall n \in \mathbb{Z}$) を課すことはできない．(1.128) を用いると，大域的な共形変換に対するワード・高橋恒等式(1.57)を演算子形式の立場から導くことができる．

1.7.5 プライマリー状態と最高ウェイト条件

続いて共形ウェイト h のプライマリー場 $\Phi(z)$ が z=0 に挿入されているケースを考えてみよう．すなわち，

$$|h\rangle \equiv \lim_{z \to 0} \Phi(z)|0\rangle, \tag{1.129}$$

とおく．これを**プライマリー状態**と呼ぶ．このように，局所場と状態を対応させられるのは，動径量子化が可能な共形場理論の大きなメリットであり，**演算子-状態対応**と呼ばれる[*17]．このとき，OPE (1.93) により，$T(z)$ は原点 z=0 に 2 次の極を持ち，

$$T(z)\,|h\rangle = \frac{h}{z^2}\,|h\rangle + O(z^{-1}),$$

*17 「演算子-状態対応」は 2 次元に限らず高次元の共形場理論でも活躍する概念である．それが可能であるためには，「無限の過去(未来)」が共形変換によって局所場が挿入される 1 点に写像されるという点がポイントである．

とふるまうので,

$$L_n|h\rangle \equiv \oint_0 \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1}T(z)\,|h\rangle = \begin{cases} 0 & ({}^\forall n \geq 1), \\ h|h\rangle & (n=0), \end{cases} \tag{1.130}$$

が得られる. リー代数の表現論の見地からは(1.130)は**最高ウェイト条件**とみなされ, 2章で詳しく解説する.

同様に無限遠 $z{=}\infty$ に $\Phi(z)$ が挿入された状態として, 共役なプライマリー状態を定義する;

$$\langle h| \equiv \lim_{z\to\infty} z^{2h}\,\langle 0|\Phi(z). \tag{1.131}$$

ここで z^{2h} の因子は, 再び $w{=}\dfrac{1}{z}$ に座標変換したとき, 位相因子を除き,

$$\Phi^{(w)}(w) = \Phi(z)\,\left(\frac{dw}{dz}\right)^{-h} \propto \Phi(z)\,z^{2h},$$

となることに起因している(位相因子は $\langle h|h\rangle{>}0$ の条件から決まる). (1.127)の導出と同様に w-座標に移ることによって,

$$\langle h|\,L_n \equiv \langle h|\,\oint_0 \frac{dw}{2\pi i}\,w^{-n+1}T^{(w)}(w) = \begin{cases} 0 & ({}^\forall n \leq -1), \\ h\langle h| & (n=0), \end{cases} \tag{1.132}$$

が導かれる. (1.130)と(1.132)を比較すると, ビラソロ演算子のエルミート共役の関係として,

$$L_n^\dagger = L_{-n}, \tag{1.133}$$

を採用すればよいことがわかる.

1.8 自由場の共形場理論

前節までは理論の共形不変性の仮定だけから導かれる一般論を展開してきたため, やや抽象的になり過ぎたかもしれない. そこで本節では伝統的な場の理論の手法に従い, 簡単な具体例を考えてみよう.

1.8.1 自由ボソン場

最も単純な共形場理論は，自由な零質量実スカラー場の理論である．4 次元の自由場の理論同様，経路積分は本質的にガウス積分となるため，2 点関数(グリーン関数)がわかれば全ての相関関数は容易に求められる．ここでは，ユークリッド計量を仮定し，簡単のため 1 成分の実スカラー場 $X(z,\bar{z})$ を考える．まず作用は，

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\,(\partial_a X)^2 \equiv \frac{1}{\pi\alpha'}\int d^2z\,\partial_z X\partial_{\bar{z}}X, \tag{1.134}$$

で与えられる．α' は (長さ)^2 の次元を持つ理論のパラメータであり，このような記号を用いるのは弦理論の慣習に従っている*18.

運動方程式は，

$$\partial_z\partial_{\bar{z}}X(z,\bar{z}) = 0 \tag{1.135}$$

であり，その古典解は正則と反正則成分の和で表される；

$$X(z,\bar{z}) = X(z)+\bar{X}(\bar{z}). \tag{1.136}$$

ウィック回転をしたとき，正則部分が左向き進行波，反正則部分が右向き進行波に対応するため，弦理論では前者を **left-mover**，後者を **right-mover** と呼ぶ習慣がある．さらに，ボソン場の正則部分 $X(z)$ を「カイラル・ボソン」と呼ぶことも多い．

2 点のグリーン関数を通常の場の理論の手法で計算しておく．ガウス積分公式より，

$$\begin{aligned}\Big\langle X(z,\bar{z})X(w,\bar{w})\Big\rangle &= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}X\,X(z,\bar{z})X(w,\bar{w})\,e^{-S(X)}\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\pi\alpha'}\partial_z\partial_{\bar{z}}\right)^{-1}_{z-w,\bar{z}-\bar{w}},\end{aligned}$$

---

*18 $\ell_s \equiv \sqrt{\alpha'}$ を「ストリング長」と呼び，$M_s \equiv 1/\ell_s \equiv 1/\sqrt{\alpha'}$ を「ストリング・(エネルギー)スケール」と呼ぶ．理論的側面にのみ関心がある場合はいちいち α' を書くのが煩わしいので，α' を簡単な数においてしまうことが多い．文献によって，$\alpha'=1, 2, 1/2$ 等の流儀があるが，どれも一長一短がある．ここでは，読者の便宜を考えて，できる限り α' をあらわに残しておく．なお，ここでの(1.140)や(1.143)などに現れる $(\alpha'/2)^{1/2}$ の因子はすべてターゲット空間の意味での次元量を α' を単位として測っていることを意味している．もちろん $\alpha'=2$ とおけば，これらの因子が消えて式がやさしくなる．

となり，2 次元のグリーン関数の公式；

$$\Delta \ln |z| \, (\equiv 4\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln |z|) = 2\pi \delta^2(z, \bar{z}), \tag{1.137}$$

を用いると，

$$\left\langle X(z,\bar{z})X(w,\bar{w}) \right\rangle = -\frac{\alpha'}{2} \ln |z-w|^2 \equiv -\frac{\alpha'}{2} \ln(z-w) - \frac{\alpha'}{2} \ln(\bar{z}-\bar{w}) \tag{1.138}$$

となることがわかる．(1.136)を用いると，2 点関数を正則部分と反正則部分に分解できる；

$$\left\langle X(z)X(w) \right\rangle = -\frac{\alpha'}{2} \ln(z-w), \quad \left\langle \bar{X}(\bar{z})\bar{X}(\bar{w}) \right\rangle = -\frac{\alpha'}{2} \ln(\bar{z}-\bar{w}). \tag{1.139}$$

正確には自由ボソンの場 $X(z)$ は共形場ではない．これは $X(z)$ の相関関数(1.139)が対数関数であり，べきの振る舞いを持たないためである*[19]．しかし $X(z)$ の微分 $\partial X(z)$ は共形ウェイト $h=1$ を持つ共形場である．実用上は，次の「カレント」$J(z)$ を定義すると便利である；

$$J(z) \equiv \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} i\partial X(z). \tag{1.140}$$

$J(z)$ 同士の OPE は，(1.139)を z と w について微分することにより，

$$J(z)J(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2} \tag{1.141}$$

となる．エネルギー・運動量テンソルは，

---

*19　少々難しい話になるが，2 次元零質量スカラー場の 2 点関数は赤外発散を導くため，正確には(1.139)は，μ を質量次元を持つ赤外のカットオフとして，

$$\left\langle X(z)X(w) \right\rangle = -\frac{\alpha'}{2} \ln\left[\mu(z-w)\right],$$

が正しい(物理では ln の引数には無次元量しか現れ得ないことに注意しよう)．このようにパラメータ μ がスケール不変性を破ってしまうので，$X(z)$ 自体は共形場としてふるまわない．しかし，微分を行うことによって，相関関数の μ 依存性が落ちてしまうので，$\partial X(z)$ は「正しい共形場」としてふるまうこととなる．

$$T(z) = \frac{1}{2} : J(z)J(z) :$$
$$\equiv \frac{1}{2} \lim_{w\to z} \left\{ J(w)J(z) - \frac{1}{(w-z)^2} \right\} \qquad (1.142)$$

で与えられる．ここで記号：：は以下で定義する正規積で，同一点にある局所場の積から発散量を取り除いて不定性なく定めるために用いられる．

演算子形式ではボソン場 X は次のようにローラン展開するのが便利である；

$$X(z) = \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \left[\phi_0 - i\alpha_0 \log z + i \sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}\right]. \qquad (1.143)$$

あるいは

$$J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1}, \qquad (1.144)$$

である．展開係数 α_n の交換関係を求めてみよう．伝統的な正準量子化を用いてもよいが，ここでは，公式(1.84)を OPE (1.141)に適用するのが最も簡単である．(1.107)と同様にして，ただちに

$$[\alpha_m,\, \alpha_n] = m\delta_{m+n,0}, \qquad ({}^\forall m, n \in \mathbb{Z}) \qquad (1.145)$$

が得られる．さらに，(1.139)を z について微分して得られる OPE

$$J(z)X(w) \sim -i \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{z-w}$$

を用いて，

$$[\alpha_m,\, \phi_0] = -i\delta_{m,0}, \qquad ({}^\forall m \in \mathbb{Z}) \qquad (1.146)$$

を得る．(1.145)より，α_n は添え字 n が正のものを消滅演算子，負のものを生成演算子とみなすことができる．すなわち α_n と α_{-n} は互いにエルミート共役であり，$\alpha_n = \sqrt{n}\, a_n$, $\alpha_{-n} = \sqrt{n}\, a_n^\dagger$, $(n \geq 1)$ と再定義すると，$a_n^\dagger$, a_n は通常の規格化された生成・消滅演算子となる．反正則部分も全く同様であり，生成・消滅演算子 $\tilde{\alpha}_n$ と，ゼロ・モード $\bar{\phi}_0$ が定義される．

状態空間はおなじみのフォック空間として与えられる．フォック真空は，全ての消滅演算子 α_n, $\widetilde{\alpha}_{n'}$ $({}^\forall n, n'=1,2,\cdots)$ で消える状態として定義されるが，$\alpha_0 \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} J(z)$, $\widetilde{\alpha}_0 \equiv -\oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \widetilde{J}(\bar{z})$ の同時固有状態として導入するのが便利である；

$$\begin{aligned}
&\alpha_n|p_L, p_R\rangle = \widetilde{\alpha}_n|p_L, p_R\rangle = 0, \quad ({}^\forall n \geq 1), \\
&\alpha_0|p_L, p_R\rangle = p_L|p_L, p_R\rangle, \quad \widetilde{\alpha}_0|p_L, p_R\rangle = p_R|p_L, p_R\rangle.
\end{aligned} \tag{1.147}$$

そして，状態空間の基底は，任意の数の生成演算子をフォック真空に作用させることによって生成される；

$$\begin{gathered}
\alpha_{-m_1}\alpha_{-m_2}\cdots\alpha_{-m_r}\widetilde{\alpha}_{-n_1}\cdots\widetilde{\alpha}_{-n_s}|p_L, p_R\rangle, \\
(1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_r,\ 1 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_s).
\end{gathered} \tag{1.148}$$

α_0, $\widetilde{\alpha}_0$ は全ての振動子 α_n, $\widetilde{\alpha}_n$ と可換であるから，状態(1.148)は全て α_0, $\widetilde{\alpha}_0$ の等しい固有値 p_L, p_R を持つことに注意しよう．すなわち，自由ボソン X のヒルベルト空間は，カレント J, $\widetilde{J}$ の「電荷」p_L, p_R を持つ部分空間によって直和分解されることになる．さらに交換関係(1.146)より，

$$[\alpha_0,\, e^{ip\phi_0}] = pe^{ip\phi_0}, \tag{1.149}$$

が従うので，一般の電荷 p_L, p_R を持つフォック真空 $|p_L, p_R\rangle$ は，電荷ゼロの真空 $|0,0\rangle$ と，

$$|p_L, p_R\rangle = e^{ip_L\phi_0}e^{ip_R\bar{\phi}_0}|0,0\rangle, \tag{1.150}$$

という関係で結ばれていることがわかる．

ビラソロ演算子は，(1.142)から振動子 α_n の 2 次式の形で求められる；

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, z^{n+1}T(z) = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} :\alpha_{n-m}\alpha_m: \\
&\equiv \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-m}\alpha_m & (n \neq 0), \\ \dfrac{1}{2}\alpha_0^2 + \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}_{>0}} \alpha_{-m}\alpha_m & (n = 0). \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.151}$$

ここで(1.142)で導入した正規積は，振動子に対して

$$:\alpha_n\alpha_m: = \begin{cases} \alpha_n\alpha_m & (n \neq -m), \\ \alpha_{-|n|}\alpha_{|n|} & (n = -m) \end{cases} \tag{1.152}$$

と作用し，いつものように消滅演算子を右へ，生成演算子を左へ移動させる働きをする．(1.151)を用いると，容易にフォック真空 $|p_L, p_R\rangle$ はプライマリー状態であり，その共形ウェイトは $h=\frac{p_L^2}{2}$, $\bar{h}=\frac{p_R^2}{2}$ に等しいことがわかる；

$$\begin{aligned} &L_n|p_L, p_R\rangle = \widetilde{L}_n|p_L, p_R\rangle = 0, \quad ({}^\forall n \geq 1), \\ &L_0|p_L, p_R\rangle = \frac{p_L^2}{2}|p_L, p_R\rangle, \quad \widetilde{L}_0|p_L, p_R\rangle = \frac{p_R^2}{2}|p_L, p_R\rangle. \end{aligned} \tag{1.153}$$

特に $p_L=p_R=0$ のフォック真空 $|0\rangle\equiv|0,0\rangle$ は $SL(2,\mathbb{C})$ 不変な真空である点に注意しよう；

$$L_n|0\rangle = \widetilde{L}_n|0\rangle = 0, \quad ({}^\forall n \geq -1). \tag{1.154}$$

演算子形式では，通常の自由場の理論と同様，ウィックの定理が成り立ち有用である．たとえば，正則部分に注目すると，2体の演算子積についてのウィックの定理は(動径順序の記号を省略して)次のように表せる；

$$X(z)X(w) = :X(z)X(w): + \langle 0|X(z)X(w)|0\rangle \equiv :X(z)X(w): - \frac{\alpha'}{2}\ln(z-w). \tag{1.155}$$

もちろん正規積の真空期待値はゼロである；

$$\langle 0| :X(z)X(w): |0\rangle = 0. \tag{1.156}$$

カレント(1.140)とエネルギー・運動量テンソル(1.142)の OPE の計算にはウィックの定理と(1.141)を利用するのが便利であり，次の基本的な公式が得られる；

$$T(z)J(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w J(w), \tag{1.157}$$

$$T(z)T(w) \sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w T(w). \tag{1.158}$$

これらの導出は読者の演習問題とする．既に解説したように，(1.157)はカレント J が共形ウェイト 1 のプライマリー場であることを意味し，(1.158)は $T(z)$(1.142)が中心電荷 1 のビラソロ代数を生成することを示している[*20]．

自由場の理論で重要な役割を果たすプライマリー場として，**頂点作用素**(vertex operator)を導入しよう．電荷(あるいは運動量) p の頂点作用素は次のように定義される演算子である；

$$V_p(z) \equiv :\exp\left\{i\left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} pX(z)\right\}:$$
$$\equiv \exp\left\{p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{-n}}{n}z^n\right\}\exp\left\{-p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}z^{-n}\right\}e^{ip\phi_0}z^{p\alpha_0}. \tag{1.159}$$

ここで，2 行目の正規積においては，α_0 を ϕ_0 の右に持っていくと約束している．便宜上挿入した次元を合わせる因子 $\left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2}$ は，$V_{p_L}(z)\overline{V_{p_R}(z)}$ が，(1.129)の意味で正確にフォック真空 $|p_L, p_R\rangle$ に対応したプライマリー場となるようにするためのものである．すなわち，$V_p(z)$ はカレント J に対する電荷 p, 共形ウェイト $\frac{p^2}{2}$ を持つプライマリー場であり，次の関係式が成立する；

$$|p_L, p_R\rangle = \lim_{z,\bar{z}\to 0} V_{p_L}(z)\overline{V_{p_R}(z)}\,|0\rangle, \tag{1.160}$$

$$J(z)V_p(w) \sim \frac{p}{z-w}V_p(w), \tag{1.161}$$

$$T(z)V_p(w) \sim \frac{p^2/2}{(z-w)^2}V_p(w)+\frac{1}{z-w}\partial_w V_p(w). \tag{1.162}$$

(1.160)はフォック真空の性質と(1.150)からただちに導かれる．

再びウィックの定理と 2 点関数の公式(1.139)を用いることにより，

$$V_{p_1}(z)V_{p_2}(w) = (z-w)^{p_1 p_2}V_{p_1+p_2}(w), \tag{1.163}$$

が成立することが示され[*21]，これより頂点作用素の 2 点関数の公式として，

---

*20 意欲のある読者は，振動子 α_n の交換関係(1.145)を直接用いることにより，L_n (1.151)が中心電荷 1 のビラソロ代数を満たすことを示してみてほしい．これは(1.158)と等価であるが，OPE の計算の方がずっとやさしい．この点が公式(1.84)の有用性である．

*21 厳密には，コンパクト・ボソンを考えるときなどに，(1.163)の右辺には「コサイクル因子」と呼ばれる電荷 p_1, p_2 によって決まる c 数の位相因子が現れることがあるが，話が高級になるのでここでは割愛する．

$$\langle 0|V_p(z)V_{-p}(w)|0\rangle = \frac{1}{(z-w)^{p^2}}, \tag{1.164}$$

が得られる．また，一般に $p_1+p_2\neq 0$ のとき，

$$\langle 0|V_{p_1}(z)V_{p_2}(w)|0\rangle = 0,$$

が成立することになるが，これはもちろん電荷の保存を表している．

1.8.2 線形ディラトン模型

上で見たように標準的な自由ボソンの理論は中心電荷 $c=1$ を持つ．しかしボソンを 2 次元時空の曲率と結合させることによって中心電荷を 1 からずらすことができる．以下の議論では，ボソン場 X を無次元化し，

$$\begin{aligned} &X(z,\bar{z}) \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\phi(z,\bar{z}), \quad \phi(z,\bar{z}) \equiv \phi(z)+\bar{\phi}(\bar{z}), \\ &\phi(z)\phi(w) \sim -\ln(z-w), \quad J(z) \equiv i\partial_z\phi(z), \end{aligned} \tag{1.165}$$

と再定義しよう．パラメータ Q を導入し，作用を次のように変更する；

$$S = \frac{1}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,(\partial_\alpha\phi)^2 + \frac{Q}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,\mathcal{R}\phi. \tag{1.166}$$

ここで $\mathcal{R}$ は世界面のスカラー曲率である．弦理論ではディラトンの背景場 $\Phi(\phi)$ との結合は，$\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,\mathcal{R}\Phi(\phi)$ と与えられるので，ここではディラトンを線形関数 $\Phi(\phi)=Q\phi$ に選んだことに相当する．それ故，世界面上の作用(1.166)で与えられる共形場理論を**線形ディラトン模型**と呼ぶ．また，パラメータ Q は**背景電荷**(background charge)と呼ばれる．

一見，平坦な計量 $g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$ を選ぶと，$\mathcal{R}=0$ であるから(1.166)第 2 項は何も変更しないように思われるが，エネルギー・運動量テンソルは作用を計量 $g_{\alpha\beta}$ について変分し，(1.34)式で計算されることを思い出そう．あらわにスカラー曲率を計算してみると，(1.166)の第 2 項から，エネルギー・運動量テンソルの新たに ϕ の 1 次の項が付け加わることがわかる；

$$T(z) = -\frac{1}{2} :\partial_z\phi(z)\partial_z\phi(z): + Q\partial_z^2\phi(z). \tag{1.167}$$

詳細な計算は読者の練習問題とするが，変形されたエネルギー・運動量テンソル(1.167)を持つ系は以下の性質を持つことがわかる；

（i） $T(z)$ 同士の OPE は，中心電荷 $c=1+12Q^2$ として(1.97)を満たす．すなわち，$c=1+12Q^2$ のビラソロ代数を生成する．

（ii） 頂点作用素 $V_\alpha(z)\equiv :e^{i\alpha\phi(z)}:$ は共形ウェイト $h=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+2iQ)$ を持つプライマリー場である．特に，$\alpha_\pm\equiv\alpha_0\pm\sqrt{\alpha_0^2+2}$ $(Q\equiv i\alpha_0)$ を持つ頂点作用素は共形ウェイト 1 を持ち，その閉曲線に沿った線積分は全てのビラソロ演算子と可換となる(確かめよ)．これを**遮蔽電荷**(screening charge)と呼ぶ；

$$Q_\pm = \oint_C V_{\alpha_\pm}(z)dz. \tag{1.168}$$

もう少し詳しく線形ディラトン模型を分類してみよう．中心電荷が実数であることを要請すると，背景電荷 Q は実数か純虚数でなければならない．

Q が純虚数の場合

この場合，$c<1$ である．世界面上の作用に純虚数のパラメータが現れるため，弦理論の模型としては解釈がつけにくいが，パラメータをうまく選ぶことによって有理共形場理論(6 章を参照)における相関関数の解析に役立てることができる．具体的には，$\alpha_+=\sqrt{\frac{2p}{q}}\left(\Longleftrightarrow \alpha_-=-\sqrt{\frac{2q}{p}}\right)$ $(p, q$ 正の整数)と選ぶと，

$$c = 1-6\frac{(p-q)^2}{pq},$$

となり，これは**ミニマル模型**(**ミニマル系列**) [21] と呼ばれる重要な共形場理論に相当し，次章で詳しく解説する．このように，純虚数の線形ディラトン模型を用いてミニマル模型を表す方法を**フェイギン・フックス**(Feigin-Fuchs)**表示**と呼び，相関関数の積分表示を与える強力な手法である [22, 23, 24].

Q が実数の場合

一般性を失わないので $Q>0$ と仮定しよう．このとき，$c>1$ である．遮蔽電

荷を与える $\alpha_\pm$ は複素となるが，特に $c>25(\Longleftrightarrow Q>\sqrt{2})$ の場合は，$\alpha_\pm$ は純虚数となるので，$\beta_\pm \equiv i\alpha_\pm$ と再定義して，

$$h(:e^{\beta_\pm \phi(z)}:) = 1, \quad \beta_\pm = Q \pm \sqrt{Q^2-2},$$

となることがわかる．遮蔽電荷として(1.168)の替わりに「ノン・カイラル」なものを考え，作用(1.166)に相互作用項として加えた以下の共形場の模型を考えることができる；

$$S = \frac{1}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,(\partial_\alpha\phi)^2 + \frac{Q}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,\mathcal{R}\phi + \mu\int d^2\sigma\sqrt{g}\,e^{\beta_\pm\phi(z,\bar{z})}. \tag{1.169}$$

このタイプの模型を**リウビル理論**と呼ぶ．この共形場模型は 2 次元量子重力の模型と解釈することもでき，その場合は相互作用項(「リウビル・ポテンシャル」とも呼ばれる)のパラメータ μ は宇宙定数と同定される．弦理論の見地からは，線形ディラトン $\Phi(\phi)=Q\phi$ であるため，$\phi\sim+\infty$ が強結合領域となるが，$\beta_\pm>0$ であるためリウビル・ポテンシャルはその領域で急激に大きくなり，そのため弦が強結合領域に深く侵入するのを防いでいる．リウビル理論は解析可能な非有理共形場理論の興味深い例として多くの研究がある*22．

1.8.3　自由フェルミオン場

次の簡単な例として自由な零質量マヨラナ・フェルミオン場を取り上げよう．零質量なので共形不変性が期待でき，実際に $c=\dfrac{1}{2}$ の共形場理論を与えることが示される．

ローレンツ計量の世界面上の作用は，

$$S = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\,\bar{\Psi}i\rho^\alpha\partial_\alpha\Psi, \tag{1.170}$$

と与えられる．ここで，2 次元のガンマ行列を

*22　リウビル理論については，膨大な数の文献があるため [25, 26, 27] のみを挙げておく．また，レビューとして 2 次元量子重力との関連に重きを置いた初学者向けのものとして [28] を，より新しい進展も含む詳細なレビューとして [29] を挙げておく．

$$\rho^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\rho} \equiv \rho^0 \rho^1 \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

のように導入する．マヨラナ・フェルミオン場 Ψ を，$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix}$，$\bar{\Psi} \equiv \psi^T \rho^0 \equiv (\widetilde{\psi}, \psi)$ と成分表示すると，ψ が左巻き($\bar{\rho}=-1$)，$\widetilde{\psi}$ が右巻き($\bar{\rho}=+1$)のカイラリティ成分にそれぞれ対応する．

ウィック回転：$\sigma^0 \to -i\sigma^2$ を行い，複素座標

$$w \equiv \sigma^1 - i\sigma^2, \qquad z \equiv e^{iw} \equiv e^{\sigma_2 + i\sigma^1},$$

を導入しよう．1.6 節で述べたように，z-座標が動径量子化に対応している．簡単な計算からわかるように，ユークリッド計量の世界面の作用として以下が得られる；

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 w \left\{ \psi_{(w)} i \partial_{\bar{w}} \psi_{(w)} - \widetilde{\psi}_{(\bar{w})} i \partial_w \widetilde{\psi}_{(\bar{w})} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \left\{ \psi_{(z)} \partial_{\bar{z}} \psi_{(z)} + \widetilde{\psi}_{(\bar{z})} \partial_z \widetilde{\psi}_{(\bar{z})} \right\}. \end{aligned} \tag{1.171}$$

1 行目が w-座標，2 行目が z-座標のもとでの作用であり，スピン 1/2 のプライマリー場の共形座標変換則：

$$\psi_{(z)} dz^{1/2} = \psi_{(w)} dw^{1/2}, \quad \widetilde{\psi}_{(\bar{z})} d\bar{z}^{1/2} = \widetilde{\psi}_{(\bar{w})} d\bar{w}^{1/2} \tag{1.172}$$

を用いた．

既に述べたように，演算子形式では動径量子化の z-座標を採用するのが有利であり，以下簡単に $\psi_{(z)}(z) \equiv \psi(z)$, $\widetilde{\psi}_{(\bar{z})}(\bar{z}) \equiv \widetilde{\psi}(\bar{z})$ と書こう．左巻き成分 ψ, 右巻き成分 $\widetilde{\psi}$ は，それぞれ正則部分(left-mover)，反正則部分(right-mover)とも呼ばれる．実際，作用(1.171)による運動方程式は，

$$\partial_{\bar{z}} \psi = 0, \quad \partial_z \widetilde{\psi} = 0$$

となり，(w-座標でも同様)それぞれ正則関数，反正則関数のみでモード展開されることを示している．自由ボソン場と同様にデルタ関数の公式((1.137)と

同値)；$\partial_{\bar{z}}\dfrac{1}{z}=\pi\delta^2(z,\bar{z})$ から 2 点関数が容易に求められ，OPE の公式として

$$\psi(z_1)\psi(z_2)\sim\frac{1}{z_1-z_2},\quad \widetilde{\psi}(\bar{z}_1)\widetilde{\psi}(\bar{z}_2)\sim\frac{1}{\bar{z}_1-\bar{z}_2},\tag{1.173}$$

が得られる*23.

エネルギー・運動量テンソルはやはり公式(1.34)によって定義されるが，計量の変分を計算する際，曲った時空上のスピン接続を考慮しなければならず，少々難しい．ここでは結果を示すに留めよう；

$$T(z)=-\frac{1}{2}:\psi(z)\partial_z\psi(z):\equiv-\frac{1}{2}\lim_{w\to z}\left\{\psi(w)\partial_z\psi(z)-\frac{1}{(w-z)^2}\right\}.\tag{1.174}$$

ここで，：　：は正規積を表している．反正則部分 $\widetilde{T}(\bar{z})$ も同様に定義する．読者はエネルギー・運動量テンソル(1.174)が $c=\dfrac{1}{2}$ のビラソロ代数を生成し，さらにこの $T(z)$ に対しフェルミオン場 $\psi(z)$ が共形ウェイト $\dfrac{1}{2}$ のプライマリー場となることを確認して欲しい．すなわち，ウィックの定理を用いて次の OPE が導かれる；

$$T(z)T(w)\sim\frac{1/4}{(z-w)^4}+\frac{2}{(z-w)^2}T(w)+\frac{1}{z-w}\partial_wT(w),\tag{1.175}$$

$$T(z)\psi(w)\sim\frac{1/2}{(z-w)^2}\psi(w)+\frac{1}{z-w}\partial_w\psi(w).\tag{1.176}$$

フェルミオンのフォック空間について調べてみよう．OPE(1.173)は，自由ボソン同様，振動子の反交換関係として解釈できる．フェルミ統計を反映して，公式(1.84)は反交換関係を与える点に注意しなければならない．まずフェルミオン場 $\psi(z),\widetilde{\psi}(\bar{z})$ のモード展開を，共形ウェイトが $\dfrac{1}{2}$ である点を考慮して*24,

---

*23　もともとのフェルミオンの作用(1.170)(あるいは(1.171))の規格化は，この OPE の公式が単純になるように決められている．

*24　一般に，共形ウェイト h の(準)プライマリー場 $\Phi(z)$ の z-平面上でのモード展開は，$\Phi(z)=\sum_n \dfrac{\Phi_n}{z^{h+n}}$ と定義する習慣がある．この定義が自然であることは，シリンダー上の w-座標で表してみればわかる．たとえば，正則部分は w-座標では，

$$\psi_{(w)}(w)=i\sum_r\psi_n e^{-irw},$$

となり，通常のフーリエ展開の形となる．なお，NS セクター($r\in\dfrac{1}{2}+\mathbb{Z}$)と R セクター($r\in\mathbb{Z}$)の境界条件は，$w$-座標と z-座標で逆になることに注意．

表 1.4 NS セクターと R セクター

	境界条件	モード
NS セクター	$\psi(e^{2\pi i}z)=\psi(z)$	$r\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$
R セクター	$\psi(e^{2\pi i}z)=-\psi(z)$	$r\in\mathbb{Z}$

$$\psi(z)=\sum_r \frac{\psi_r}{z^{r+\frac{1}{2}}}, \quad \widetilde{\psi}(\bar{z})=\sum_r \frac{\widetilde{\psi}_r}{\bar{z}^{r+\frac{1}{2}}}, \tag{1.177}$$

と定義することにしよう．ここで，$\psi, \widetilde{\psi}$ がスピノル場であることを反映して，2 種類の境界条件が可能であり，それぞれ **NS**(Neveu-Schwarz)**セクター**，**R** (Ramond)**セクター**と呼ばれる．

各モードは反交換関係

$$\{\psi_r,\psi_s\}=\delta_{r+s,0}, \quad \{\widetilde{\psi}_r,\widetilde{\psi}_s\}=\delta_{r+s,0} \tag{1.178}$$

によって特徴付けられる．ここで r，s は NS セクターに対し半整数値，R セクターに対し整数値を取る(表 1.4)．このように NS セクターと R セクターのヒルベルト空間は，半整数及び整数モードを持つフェルミオン振動子のフォック空間として実現されることとなる．

$$\mathcal{H}_{\rm NS}\equiv \bigoplus_{\substack{n_1<n_2<\cdots,\\ n_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}} \bigoplus_{\substack{m_1<m_2<\cdots,\\ m_j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}} \prod_{i,j}\mathbb{C}\psi_{-n_i-\frac{1}{2}}\widetilde{\psi}_{-m_j-\frac{1}{2}}\,|0\rangle_{\rm NS}, \tag{1.179}$$

$$\mathcal{H}_{\rm R}\equiv \bigoplus_{\alpha=\pm}\bigoplus_{\substack{n_1<n_2<\cdots,\\ n_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}} \bigoplus_{\substack{m_1<m_2<\cdots,\\ m_j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}} \prod_{i,j}\mathbb{C}\psi_{-n_i}\widetilde{\psi}_{-m_j}\,|0;\alpha\rangle_{\rm R}. \tag{1.180}$$

ここで正則部分の NS, R セクターのフォック真空 $|0\rangle_{\rm NS}$，$|0;\alpha\rangle_{\rm R}$ $(\alpha=\pm)$を

$$\begin{aligned}&\psi_{n+\frac{1}{2}}|0\rangle_{\rm NS}=0, \quad \widetilde{\psi}_{n+\frac{1}{2}}|0\rangle_{\rm NS}=0, \quad ({}^\forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}),\\ &\psi_n|0;\alpha\rangle_{\rm R}=0, \quad \widetilde{\psi}_n|0;\alpha\rangle_{\rm R}=0, \quad ({}^\forall n\in\mathbb{Z}_{>0})\end{aligned} \tag{1.181}$$

によって定義している．R セクターの真空は若干事情が複雑で，2 重に縮退している．これは，ゼロ・モード ψ_0，$\widetilde{\psi}_0$ が $\{\psi_0,\psi_0\}=1$，$\{\widetilde{\psi}_0,\widetilde{\psi}_0\}=1$，$\{\psi_0,\widetilde{\psi}_0\}=0$ を満たすので，2 次元のクリフォード代数をなし，

$$\{\Gamma,\psi_0\}=0, \quad \{\Gamma,\widetilde{\psi}_0\}=0, \quad \Gamma^2=1$$

を満たすカイラリティ演算子 Γ が定義できるからである．たとえば 2 行 2 列の行列で，$\psi_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1$，$\widetilde{\psi}_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2$，$\Gamma=\sigma_3$ (σ_i はパウリ行列) などと表現される(Γ は非ゼロモードとは可換であるとする)．これにより，2 重に縮退した R セクターの真空は，

$$\Gamma|0;\pm\rangle_{\mathrm{R}} = \pm 1|0;\pm\rangle_{\mathrm{R}}, \quad \psi_0|0;\pm\rangle_{\mathrm{R}} = |0;\mp\rangle_{\mathrm{R}}, \quad \widetilde{\psi}_0|0;\pm\rangle_{\mathrm{R}} = \pm i|0;\mp\rangle_{\mathrm{R}}, \tag{1.182}$$

と特徴づけられる．

それではビラソロ演算子はどのように書かれるであろうか？ まず L_m ($m\neq 0$) については，公式(1.174)からただちに

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_r \left(r+\frac{1}{2}\right)\psi_{m-r}\psi_r, \tag{1.183}$$

が得られる($\widetilde{L}_m$ についても同様)．ここで，r は NS セクターに対してはすべての半整数，R セクターに対してはすべての整数を走る．L_0 に関しては，(1.174)の正規積を考慮しなければならない．詳しい計算は読者の練習問題とするが，(1.174)に $\psi(z)$ のモード展開を直接代入して留数定理を用いることにより，

$$L_0 = \sum_{r\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}} r\psi_{-r}\psi_r \qquad (\text{NS セクター}),$$

$$L_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n\psi_{-n}\psi_n + \frac{1}{16} \qquad (\text{R セクター}) \tag{1.184}$$

を得る．NS セクターの表式を見ると，自由ボソンのときと同様に，正規積 : : は通常の振動子の意味での正規順序と等価になっていることがわかる．すなわち，NS セクターの **z-平面上での**零点エネルギーがゼロとなるように正規積が定義されているのである．しかし，R セクターについては，$+\dfrac{1}{16}$ の零点エネルギーが存在する．これは R セクターについては(z-平面上において)フェルミオン場が反周期的となるので，境界条件を変える「ツイスト演算子」の共形次元 $\dfrac{1}{16}$ が真空のエネルギーに加わっていると解釈することが可能である．

シリンダー上で考えると，共形座標変換の公式；

$$L_0^{\rm cyl} = L_0 - \frac{1}{48}, \tag{1.185}$$

$\left(c=\dfrac{1}{2}\right.$ に注意$\left.\right)$により，NSセクターの零点エネルギーが $-\dfrac{1}{48}$，Rセクターの零点エネルギーが $-\dfrac{1}{48}+\dfrac{1}{16}=+\dfrac{1}{24}$ に等しいことがわかる．この結果はまた，正規順序を無視した際に生ずる発散するフェルミオンの零点エネルギーの表式

$$-\frac{1}{2}\sum_{r>0} r, \quad \begin{cases} r \in \dfrac{1}{2}+\mathbb{Z} & (\text{NS セクター}) \\ r \in \mathbb{Z} & (\text{R セクター}) \end{cases} \tag{1.186}$$

に「ζ関数正則化」の方法を適用しても得ることができる．この点については5章において解説する．

2
表現論とビラソロ代数

この章では 1.7 節で導入したビラソロ代数

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}, \tag{2.1}$$
$$[L_n, c] = [c, c] = 0$$

の表現を調べ，それを共形場の理論に応用しよう．

2.1 なぜ表現論が有用か？

ビラソロ代数の表現論に詳しく立ち入る前に，量子力学で回転群あるいは $SU(2)$ の果たした役割を復習してみよう．よく知られたように $SU(2)$ の表現を詳しく調べることによってスピンの量子化が得られる．$SU(2)$ は 3 つの生成子 J_1, J_2, J_3 を持ち，交換関係

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c, \tag{2.2}$$

を満たす．カシミア作用素(=「角運動量の大きさ」)を

$$\boldsymbol{J}^2 = J_1^2+J_2^2+J_3^2 \tag{2.3}$$

で定義すると $\boldsymbol{J}^2$ は全ての生成子と交換するので，シューアの補題により各既約表現で一定の値を取る．

通常我々は，演算子 J_3 が対角化された表現を考える．J_3 の固有値は磁気量子数(ウェイト)と呼ばれる．昇降演算子を $J_+=J_1+iJ_2$ と $J_-=J_1-iJ_2$ で定義すると，これらは J_3 の固有値を ± 1 だけ変化させる．今，磁気量子数が j に等しく，J_+ で消される状態 $|j\rangle$ を考えよう；

$$J_3|j\rangle = j|j\rangle, \qquad J_+|j\rangle = 0. \tag{2.4}$$

(2.3)を用いるとこの状態のカシミア演算子の値は，$\boldsymbol{J}^2{=}J_3(J_3{+}1){+}J_-J_+$ に注意して，

$$\boldsymbol{J}^2|j\rangle = J_3(J_3{+}1)|j\rangle = j(j{+}1)|j\rangle \tag{2.5}$$

となることがわかる．カシミア演算子の値が $j(j{+}1)$ に等しい状態はスピン j を持つと呼ばれ，状態 $|j\rangle$ は通常 $|j,j\rangle$ と表され，「スピン j の最高ウェイト状態」と呼ばれる．スピン j を持つ他の状態はウェイトを下げる演算子 J_- を $|j,j\rangle$ に作用させて作ることができる；

$$J_-^n|j\,j\rangle = |j,j{-}n\rangle, \quad n = 0,1,2,3,\cdots. \tag{2.6}$$

これらの状態のノルムを計算すると $|j,j{-}n\rangle$, $n{>}2[j]{+}1$ のなかに無数の負のノルムの状態が含まれることがわかる．負のノルムは負の確率を意味し量子力学のヒルベルト空間の中に存在することはできない．これら負のノルムを避ける唯一の可能性はスピン j が整数ないし半整数の値 $j{=}0, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, \cdots$ を取る場合である．このとき $|j,j{-}n\rangle$, $n{>}2[j]{+}1$ の状態は全てゼロ・ノルムとなるので，これらをゼロ・ベクトルとおいてヒルベルト空間から捨ててしまうことができる($[j]$ は j の整数部分を意味する)．すると結局スピン j の表現は磁気量子数が $|m|{\le}j$ の状態

$$|j,j\rangle,\ |j,j{-}1\rangle,\ |j,j\rangle,\ |j,j{-}2\rangle,\ \cdots,\ |j,1{-}j\rangle,\ |j,-j\rangle \tag{2.7}$$

からなることがわかる．

このように量子力学において対称性のユニタリな表現(全ての状態が正のノルムを持つ表現)を作ろうとすると，角運動量が量子化されることとなる．それではビラソロ代数の表現論はどのような結果に導くであろうか？ 以下に見るように，ビラソロ代数の表現を詳しく調べることにより，プライマリー場の共形ウェイトが決定される．

2.2　バーマ加群

ビラソロ代数の表現は $SU(2)$ の場合と同様に構成される．中心電荷 c と L_0 を同時交換可能な演算子と考えこれらを対角化する表現を考えよう．中心電荷はビラソロ代数の全ての演算子と交換するため，ビラソロ代数の各既約表現においては一定の値を取る．以下ではこの値を固定してある c 数と考えよう．

まず交換関係

$$[L_0, L_n] = -n\,L_n, \tag{2.8}$$

より L_n $(n<0)$ は L_0 の値を $|n|$ だけ増やす昇演算子(raising operators)，また L_n $(n>0)$ は n だけ減らす降演算子(lowering operator)であることがわかる．

今，表現空間のなかに最小の L_0 の値を持つ状態 $|c,h\rangle$ が存在することを仮定しよう．この状態について

$$\begin{cases} L_n|c,h\rangle = 0 \qquad (n=1,2,3,\cdots), \\ L_0|c,h\rangle = h|c,h\rangle \end{cases} \tag{2.9}$$

が成り立つ．既に 1.7.5 項で述べたように，これは共形ウェイト h のプライマリー状態を特徴付ける**最高ウェイト条件**と呼ばれ，角運動量の場合の条件(2.4)に相当する．最高ウェイトベクトル $|c,h\rangle$ は降演算子全て $L_n\,(n>0)$ で消されるため真空に相当する状態とみなすことができる．他の全ての状態は昇演算子 $L_{-n}\,(n>0)$ を順次 $|c,h\rangle$ にほどこすことによって得られる．

しかし，角運動量 $SU(2)$ の場合と違ってビラソロ代数には無限個の昇降演算子が存在する．次の形を持つベクトル

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_r}|c,h\rangle \tag{2.10}$$

は全て固有値 $h+N$ を持つ L_0 の固有ベクトルである．ここで $N=n_1+n_2+\cdots+n_r$．非負の整数 N は状態(2.10)の**レベル**と呼ばれる．もちろんレベル 0 の状態はプライマリー状態であり，それに対し $N\geq1$ となる状態を**ディセンダン**

表 2.1 レベルの状態

レベル	固有ベクトル
h	$\|c,h\rangle$
$h+1$	$L_{-1}\|c,h\rangle$
$h+2$	$L_{-2}\|c,h\rangle,\quad L_{-1}^2\|c,h\rangle$
$h+3$	$L_{-3}\|c,h\rangle,\quad L_{-2}L_{-1}\|c,h\rangle,\quad L_{-1}^3\|c,h\rangle$
$h+4$	$L_{-4}\|c,h\rangle,\quad L_{-3}L_{-1}\|c,h\rangle,\quad L_{-2}L_{-2}\|c,h\rangle,\quad L_{-2}L_{-1}^2\|c,h\rangle,\quad L_{-1}^4\|c,h\rangle$
$\vdots$	$\vdots$

ト(descendant)と呼ぶ.

レベル N の状態は表現空間のなかの(多次元の)部分空間を作る. 交換関係(2.1)を用いて昇降演算子 L_n を添え字の小さいほうが右側にくるように並べ代えると固有値 L_n の部分空間の基底を次のように作ることができる;

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_r}|c,h\rangle,\qquad n_1\geq\cdots\geq n_r>0,\quad \sum n_i=N. \tag{2.11}$$

最初のいくつかのレベルの状態を表 2.1 に示そう. L_0 の固有値が $h+N$ の部分空間の次元を固有値 $h+N$ の多重度と呼ぼう. すると上で調べた低いレベルの場合でもわかるように, 一般に固有値 $h+N$ の多重度は $p(N)$ に一致している：ここで $p(N)$ は整数 N を正整数の和に分割して表す表し方の数である. 固有値 $h+N$ の多重度に重み x^N を掛けて足し上げると

$$\begin{aligned}\sum_{N=0}^{\infty}p(N)x^N &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}\\ &= 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+\cdots \end{aligned}\tag{2.12}$$

を得る. 固有値 $h+N$ の多重度が $p(N)$ に等しい無限次元のベクトル空間を**バーマ加群**(Verma module)と呼び $V(c,h)$ と表す;

$$V(c,h)=\bigoplus_{N=0}^{\infty}V(c,h)_N,$$
$$V(c,h)_N=\left\{\sum c_{n_1,\ldots,n_r}L_{-n_1}\cdots L_{-n_r}|c,h\rangle\;\middle|\;n_1\geq\cdots\geq n_r>0,\ \sum n_i=N\right\}.$$

ビラソロ代数の最高ウェイト表現 $L(c,h)$ について, その**指標**(character)は

$$\chi_{L(c,h)}(\tau) \equiv \mathrm{Tr}_{L(c,h)}\left[q^{L_0-\frac{c}{24}}\right], \qquad q = e^{2\pi i\tau} \tag{2.13}$$

で定義される．ここで q あるいは τ は単に形式的な変数であるが，その物理的な意味は 5 章で明らかになる．指標は L_0 の固有値の生成母関数である．バーマ加群 $V(c,h)$ の場合には指標は

$$\begin{aligned}\chi_{V(c,h)}(\tau) &= \mathrm{Tr}_{V(c,h)}\left[q^{L_0-\frac{c}{24}}\right] \\ &= q^{h-\frac{c}{24}} \sum_{N=0}^{\infty} \dim V(c,h)_N\, q^N \\ &= \frac{q^{h-\frac{c}{24}}}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)}\end{aligned}$$

に等しい．

量子力学的な状態の内積を考えるには，状態(2.10)のエルミート共役を

$$\langle c,h|L_{-n_r}^{\dagger}\cdots L_{-n_2}^{\dagger}L_{-n_1}^{\dagger} \equiv \langle c,h|L_{n_r}\cdots L_{n_2}L_{n_1}, \qquad n_i > 0, \quad \sum_i n_i = N,$$

と定義する．ここで(1.133)の関係を用いている(ビラソロ演算子の順序に注意)．たとえば，レベル 1 の状態 $L_{-m}|c,h\rangle$ のノルムは，以下のようになる．

$$\| \, L_{-m}|c,h\rangle \, \|^2 = \langle c,h|L_m L_{-m}|c,h\rangle,$$

さて，本節の最後にビラソロ代数の表現論において重要なテーマを挙げておこう：

- c,h がどのような値のとき，$V(c,h)$ は既約か？
- $V(c,h)$ が可約のときどのようにして既約表現 $L(c,h)$ を構成するか？
- どのような c,h の値のとき，$V(c,h)$ あるいは $L(c,h)$ が正定値の内積を持ち，ユニタリ表現になるか？

これらについて，次節以降で詳しく解説したい．$SU(2)$ のような有限次元コンパクト群では全ての有限次元既約表現はユニタリになるが，ビラソロ代数のような無限次元リー代数では事情が異なるという点を強調しておく．

2.3 特異ベクトルとカッツ行列式

最高ウェイトベクトルではないベクトル $|\chi\rangle \in V(c,h)$ が，条件

$$L_n|\chi\rangle = 0, \qquad (^\forall n > 0) \tag{2.14}$$

を満たすとき**特異ベクトル**と呼ばれる．特異ベクトル $|\chi\rangle$ はバーマ加群 $V(c,h)$ の任意のベクトルと直交する．実際，最高ウェイトベクトルを $|c,h\rangle$ とするとき，$V(c,h)$ は $\prod_i L_{-n_i}|c,h\rangle$ という形の元で張られるが，(2.14)を用いると，

$$\langle\chi|\prod_i L_{-n_i}|c,h\rangle = \overline{\langle c,h|\prod_i L_{n_i}|\chi\rangle} = 0,$$

となることがわかる．特に特異ベクトルは自分自身とも直交するのでゼロ・ノルムを持つ(**ヌル**(null)**ベクトル**，または**ヌル状態**と呼ばれる)．

特異ベクトルの条件(2.14)は，最高ウェイト条件と同じ形である点に注意しよう．今，空間 $V(c,h)$ のレベル $N>0$ の高さに特異ベクトル $|\chi\rangle$ が存在するとしよう．すなわち，$L_0|\chi\rangle=(h+N)|\chi\rangle$ が成り立つ．このとき，特異ベクトル $|\chi\rangle$ は最高ウェイトの条件を満たすが，その L_0 固有値は $h+N$ に等しい．すると，ベクトル $|\chi\rangle$ のディセンダント

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots L_{-n_r}|\chi\rangle, \qquad n_1 \geq \cdots \geq n_r > 0 \tag{2.15}$$

は空間 $V(c,h)$ における不変部分空間 $V(c,h+N;\chi)$ を生成し，バーマ加群 $V(c,h)$ は可約になる．さらに $V(c,h+N;\chi)$ の任意の元は，$V(c,h)$ のすべての元と直交し，やはりヌルベクトルとなる(なぜそうなるかを考えよ)．このとき，バーマ加群が「退化した」とも言われる．以上の考察から，次の事実を得る；

バーマ加群 $V(c,h)$ は特異ベクトルを含まないときに限り既約である．

それでは，バーマ加群が特異ベクトルを持つかどうかはどのように判定すればよいであろうか？ レベル $N>0$ の部分空間 $V(c,h)_N$ の基底を $\{|v_1\rangle,\cdots,|v_K\rangle\}$ $(K\equiv p(N)=\dim V(c,h)_N)$ としよう．具体的には $|v_i\rangle$ は，

$$L_{-1}^N|c,h\rangle,\ L_{-1}^{N-2}L_{-2}|c,h\rangle,\ \cdots,\ L_{-N}|c,h\rangle, \tag{2.16}$$

の線形結合で与えられる．今，特異ベクトル $|\chi\rangle$ が存在するとし，それを $|v_1\rangle$ に選ぶことにする．すると上で述べたように，特異ベクトルはバーマ加群 $V(c,h)$ の全てのベクトルと直交するため，サイズ $K\times K$ の行列；

$$\begin{pmatrix} \langle v_1|v_1\rangle & \cdots & \langle v_1|v_K\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_K|v_1\rangle & \cdots & \langle v_K|v_K\rangle \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

の第 1 行(または第 1 列)の全ての成分はゼロになり，この行列は退化する．行列が退化するかどうかは基底の取り方にはよらないので，基底(2.16)を用いて，

$$\mathcal{M}_N(c,h) \equiv \begin{pmatrix} \langle c,h|L_{+1}^N L_{-1}^N|c,h\rangle & \cdots & \langle c,h|L_{+1}^N L_{-N}|c,h\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle c,h|L_{+N} L_{-1}^N|c,h\rangle & \cdots & \langle c,h|L_{+N} L_{-N}|c,h\rangle \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

と定義しよう．行列 $\mathcal{M}_N(c,h)$ の行列式は**カッツ行列式**(Kac determinant)と呼ばれる．こうして，以下の事実がわかる；

バーマ加群 $V(c,h)$ がレベル N の特異ベクトルを持つ

$\iff$ 行列 $\mathcal{M}_N(c,h)$ が退化する．

$\iff \det \mathcal{M}_N(c,h) = 0$

このとき行列 $\mathcal{M}_N(c,h)$ のゼロ固有値に対する固有ベクトルが特異ベクトルを与える．

さらに以下の事実も明らかであろう；

バーマ加群 $V(c,h)$ がユニタリである．

$\iff {}^\forall N > 0$ に対し，$\mathcal{M}_N(c,h)$ が正定値．

簡単なケースでカッツ行列式を計算してみよう．レベル 1 にはベクトル $L_{-1}|c,h\rangle$ しか存在しないので，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2(c,h) &= \langle c,h|L_1L_{-1}|c,h\rangle \\ &= \langle c,h|[L_1,L_{-1}]+L_{-1}L_1|c,h\rangle \\ &= \langle c,h|2L_0|c,h\rangle = 2h.\end{aligned}$$

ここで最高ウェイトの条件(2.9)を用いた．したがって $h=0$ のバーマ加群 $V(c,h=0)$ は，c の値によらず，レベル1の特異ベクトルを持つことがわかる．

レベル2には2つのベクトル $L_{-2}|c,h\rangle$ と $L_{-1}^2|c,h\rangle$ が存在する．したがって

$$\mathcal{M}_2(c,h) = \begin{pmatrix} \langle h|L_1^2L_{-1}^2|h\rangle & \langle h|L_1^2L_{-2}|h\rangle \\ \langle h|L_2L_{-1}^2|h\rangle & \langle h|L_2L_{-2}|h\rangle \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

各行列要素は上と同様にビラソロ代数の交換関係と最高ウェイト条件を用いて計算できる；

$$\begin{aligned}\langle h|L_1^2L_{-1}^2|h\rangle &= \langle h|L_1(2L_0+L_{-1}L_1)L_{-1}|h\rangle \\ &= 2(h+1)\langle h|L_1L_{-1}|h\rangle+2h\langle h|L_1L_{-1}|h\rangle \\ &= 4h(2h+1), \\ \langle h|L_1^2L_{-2}|h\rangle &= 3\langle h|L_1L_{-1}|h\rangle \\ &= 6h, \\ \langle h|L_2L_{-2}|h\rangle &= 4h+\frac{c}{2}.\end{aligned}$$

よって行列(2.19)は

$$\mathcal{M}_2(c,h) = \begin{pmatrix} 4h(2h+1) & 6h \\ 6h & 4h+\dfrac{c}{2} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

となり，その行列式は

$$\begin{aligned}\det\mathcal{M}_2(c,h) &= 4h(2h+1)\left(4h+\frac{c}{2}\right)-36h^2 \\ &= 4h\left\{8h^2+(c-5)h+\frac{c}{2}\right\}\end{aligned}$$

で与えられる．レベル2の特異ベクトルは h の値が

$$h_{1,1} = 0,$$
$$h_{1,2} = \frac{5-c+\sqrt{(1-c)(25-c)}}{16},$$
$$h_{2,1} = \frac{5-c-\sqrt{(1-c)(25-c)}}{16}$$

のときに現れる．ここで特異ベクトルのディセンダントはやはり上のレベルのカッツ行列式のゼロ点を与えるという事実に注意しよう．$h=h_{1,1}=0$ のときには，すでに見たようにレベル1で特異ベクトルが現れるため，レベル2のカッツ行列式は $h=0$ でゼロ点を持つ．$h=h_{1,2}$，$h=h_{2,1}$ はレベル2で新しく現れる特異ベクトルに対応する．

特異ベクトルは行列 $\mathcal{M}_2(c,h)$ のゼロ固有値に対する固有ベクトルである．簡単な計算で，状態

$$|\chi\rangle \equiv \left\{L_{-2}-\frac{3}{2(2h+1)}L_{-1}^2\right\}|c,h\rangle \tag{2.21}$$

が $h=h_{1,2}$ ないし $h=h_{2,1}$ のとき，特異ベクトルになることがわかる(確かめよ)．

より高いレベルでは行列式の計算は次第に複雑になる．カッツ(Kac)と，フェイギンとフックスは任意のレベルのカッツ行列式を表す公式を与えた [30, 22].

定理 2.1

$$\det \mathcal{M}_N(c,h) = K_N \prod_{\substack{r,s=1 \\ 1\le rs\le N}}^{N} (h-h_{r,s}(c))^{p(N-rs)} \tag{2.22}$$

ここで $h_{r,s}(c)$ は

$$h_{r,s}(c) \equiv \frac{1}{48}\left\{(13-c)(r^2+s^2)+\sqrt{(c-1)(c-25)}(r^2-s^2)-24rs-2+2c\right\}, \tag{2.23}$$

で与えられる．また K_N は N のみに依存する正の定数である；

$$K_N \equiv \prod_{\substack{r,s=1 \\ 1\le rs\le N}}^{N} ((2r)^s s!)^{p(N-rs)-p(N-r(s+1))}. \tag{2.24}$$

ここで $p(N)$ は(2.12)で定義された N の分割数である. □

上記の定理においては，次のように中心電荷をパラメータ化するのが便利である；

$$c = 1-\frac{6}{\mu(\mu+1)}, \qquad (\mu\in\mathbb{C}). \tag{2.25}$$

このとき(2.23)の $h_{r,s}$ (c を省略)は，より簡潔に，

$$h_{r,s} = \frac{\{(\mu+1)r-\mu s\}^2-1}{4\mu(\mu+1)} \tag{2.26}$$

と表すことができる．

ここで(2.23)から(2.26)への書き換えは少々煩雑な計算を必要とする．この計算を要領よく行うために，1.8.2 項で触れたフェイギン・フックス表示を思い出そう．実際，以下の議論は [22] でカッツ行列式の公式(2.22)を証明するために用いられているパラメータ化と本質的に同じである(それゆえに「フェイギン・フックス表示」と呼ばれる)．中心電荷は，

$$c = 1-12\alpha_0^2, \qquad \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\mu(\mu+1)}},$$

と表され，頂点作用素 V_α の共形ウェイトは，

$$h(\alpha) \equiv \frac{1}{2}\alpha(\alpha-2\alpha_0),$$

と与えられる．遮蔽電荷(1.168)を与える $V_{\alpha_\pm}$ のパラメータ α_+, α_- は，2 次方程式

$$h(\alpha)=1 \iff \alpha^2-2\alpha_0\alpha-2=0,$$

の 2 つの根であり，$\alpha_\pm \equiv \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2+2}$ である．そして，

$$\alpha_{r,s} \equiv \frac{1}{2}\{(1-r)\alpha_+ + (1-s)\alpha_-\}, \tag{2.27}$$

とおくと，カッツ行列式のゼロ点 $h_{r,s}$ は，対応する頂点作用素 $V_{\alpha_{r,s}}$ の共形ウェイトと等しいことがわかり，

$$\begin{aligned} h_{r,s} &\equiv h(\alpha_{r,s}) \\ &= \frac{1}{8}(r\alpha_+ + s\alpha_-)^2 - \frac{1}{8}(\alpha_+ + \alpha_-)^2 \\ &= \frac{1}{8}(r\alpha_+ + s\alpha_-)^2 - \frac{1}{2}\alpha_0^2, \end{aligned} \tag{2.28}$$

となる．実際，

$$\alpha_+ = \sqrt{\frac{2(\mu+1)}{\mu}} \equiv \frac{\sqrt{1-c} + \sqrt{25-c}}{\sqrt{12}},$$
$$\alpha_- = -\sqrt{\frac{2\mu}{\mu+1}} \equiv \frac{\sqrt{1-c} - \sqrt{25-c}}{\sqrt{12}},$$

が成り立つので，(2.28)は(2.23)と(2.26)の両者に一致することが確認できる．

カッツの公式からただちに次の事実がわかる．

（i） 中心電荷 c が与えられたとき，h が

$$h = h_{r,s}, \qquad N = rs, \qquad (r, s \in \mathbb{Z}_{>0})$$

を満たせばレベル N に特異ベクトルが存在する．

（ii） バーマ加群 $V(c,h)$ は $c>1$ かつ $h>0$ のとき，既約である．

（iii） $V(1,h)$ は $h \neq \frac{m^2}{4}$ $(m \in \mathbb{Z})$ のときに限って既約である．

（iv） $V(0,h)$ は $h \neq \frac{1}{24}(m^2-1)$ $(m \in \mathbb{Z})$ のときに限って既約である．

カッツ行列式は特異ベクトルの存在に関して完全な情報を与える．特異ベクトルはそれぞれバーマ加群 $V(c,h)$ の不変部分空間を生成する．したがって既約表現 $L(c,h)$ は次の商空間

$$L(c,h) = V(c,h)/J(c,h), \tag{2.29}$$

で与えられる．ここで $J(c,h)$ は $V(c,h)$ の最大の不変部分空間である．すなわち，$J(c,h)$ は全ての特異ベクトルとそのディセンダントからなる；

$$J(c,h) = \bigcup_{|\chi\rangle} \left\{ c_{\{n\}} L_{\{-n\}} |\chi\rangle \right\}. \tag{2.30}$$

表現 $L(c,h)$ は最高ウェイト (c,h) を持つ唯一の既約表現である．このようにカッツの公式を詳しく調べることにより既約表現空間 $L(c,h)$ に関する完全な情報が得られる．

2.4 ミニマル模型

中心電荷の値が 0 と 1 の間にあるときには，c，h の値を特別にとるとカッツ行列式にゼロ点が現れ，特に物理的に興味深い表現が得られる．中心電荷 c が次の離散的な値を取るとき，これらを**ミニマル模型**（**ミニマル系列**）[21] と呼ぶ；

$$c = c_{p,p'} = 1 - \frac{6(p-p')^2}{pp'}. \tag{2.31}$$

ここで p, p' は，互いに素な正の整数である．中心電荷が(2.31)で与えられる共形場のモデルを $\mathcal{M}_{p,p'}$ と表そう．$\mathcal{M}_{p,p'}$ では α_+^2, α_-^2 の値は有理数となり，

$$\alpha_+ = \sqrt{\frac{2p'}{p}}, \qquad \alpha_- = -\sqrt{\frac{2p}{p'}}, \tag{2.32}$$

である．ミニマル模型 $\mathcal{M}_{p,p'}$ に現れるプライマリー場の共形ウェイト（最高ウェイト）はカッツ行列式にゼロ点が現れる値

$$h = h_{r,s} = h_{p-r,p'-s} = \frac{(p'r-ps)^2-(p'-p)^2}{4pp'},$$
$$1 \le r \le p-1, \quad 1 \le s \le p'-1$$

に等しい．後の章で詳しく見るように，これらの共形ウェイト $\{h{=}h_{r,s}\}$ を持つプライマリー場は演算子積展開のもとで閉じた演算子の組を構成している．ミニマル系列ではこのように理論に現れるプライマリー場（最高ウェイト）の数

が有限個($(p-1)(p'-1)$)であることが特徴であり，6章で扱う有理共形場理論の代表例となる．中心電荷が(式(2.31)のリストに含まれない)一般の値を取る場合には，共形場の理論は必ず無限個のプライマリー場を含む．したがって，ミニマル模型は有限個の場が互いに相互作用するもっとも基本的な共形場のシステムを与える．

ミニマル模型では各表現の最高ウェイトはカッツ行列のゼロ点にあたり，したがって特異ベクトルを含んでいる．次節で見るように，表現に特異ベクトルが存在すると共形不変性を用いて相関関数に関する厳密な微分方程式が導かれ，これを解くことによって相関関数が決定される．このため，ミニマル模型では理論は強い予言能力を持っている．

2.5　ユニタリ・ミニマル模型

ミニマル模型の中心電荷をさらに次の値に制限すると，得られる表現は正定値な内積を持ち，ユニタリ表現となる．

定理 2.2 [31]

中心電荷が $0 \le c < 1$ の領域ではビラソロ代数のユニタリ表現は中心電荷が次の値のときにのみ存在する．

$$c = c_m = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \qquad m = 2, 3, 4, \ldots \tag{2.33}$$ □

このような理論を**ユニタリ・ミニマル模型**(**ユニタリ・ミニマル系列**)と呼ぶ．中心電荷が(2.33)の模型を $\mathcal{M}_m$ で表そう．すぐわかるように，これはミニマル模型で $|p-p'|=1$ とおいて得られる模型である．(2.33)で $p=m$, $p'=m+1$ とおくことにより，ユニタリ・ミニマル模型のプライマリー場の共形ウェイトは，

$$h = h_{r,s} = h_{m-r,m+1-s} = \frac{\{(m+1)r-ms\}^2-1}{4m(m+1)},$$
$$1 \le r \le m-1, \quad 1 \le s \le m, \tag{2.34}$$

で与えられることがわかる．添え字についての対称性 $h_{r,s}=h_{m-r,m+1-s}$ を用いると，(r,s) の領域は $1 \le s \le r \le m-1$ に制限できる．

ユニタリ・ミニマル系列の指標は次の形を持つことが知られている [32]．式(2.33)の m を固定して

$$\begin{aligned}\chi_{r,s}(\tau) &= \chi_{L(c_m,h_{r,s})}(\tau)\\ &= \mathrm{Tr}_{L(c_m,h_{r,s})}\left[q^{L_0-\frac{c}{24}}\right]\\ &= \frac{1}{\eta(\tau)}\left[\Theta_{(m+1)r-ms,m(m+1)}(\tau)-\Theta_{(m+1)r+ms,m(m+1)}(\tau)\right].\end{aligned} \tag{2.35}$$

ここで $\eta(\tau)$ はデデキント(Dedekind)のエータ関数

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i\tau n}), \tag{2.36}$$

また $\Theta_{m,k}$ はテータ関数

$$\Theta_{m,k}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ik\tau\left(n+\frac{m}{2k}\right)^2}, \tag{2.37}$$

である(エータ関数やテータ関数の詳細については付録を参照)．

このように，領域 $0<c<1$ において，物理的に意味のあるユニタリ理論が離散的な値の中心電荷に対してのみ構成できることは特に著しい結果である．また，ユニタリ理論に現れる共形次元 h も離散的な値を取る．プライマリー場の共形次元は 2 次元臨界現象における種々の臨界指数に等しく，この事実は 2 次元臨界現象の臨界指数が全て有理数になることを予言する．実際これまでイジング模型(Ising model)など多くの可解模型において有理数の値を持つ臨界指数が得られており大きな謎とされてきた．共形場の方法はこの謎に明快な回答を与えた．$SU(2)$ 群においてユニタリ性の要請がスピンの量子化を導いたのと同様に，ビラソロ代数の表現のユニタリ性が中心電荷と臨界指数 h の値

表 2.2 イジング模型 $\mathcal{M}_3, c=\frac{1}{2}$

$s=3$	$\frac{1}{2}$	0
$s=2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$s=1$	0	$\frac{1}{2}$
$h_{r,s}$	$r=1$	$r=2$

$s=3$	ε	$\mathbf{1}$
$s=2$	σ	σ
$s=1$	$\mathbf{1}$	ε
$h_{r,s}$	$r=1$	$r=2$

を量子化し，可能な値の一覧を与える．

このようにユニタリ・ミニマル模型は $0<c<1$ の領域における 2 次元臨界現象のユニバーサリティクラスの完全な分類を与える[*1]．以下では $m=3,4$ のユニタリ・ミニマル模型について，実際にこれらの臨界現象を与える統計力学系を調べよう[*2]．

(1) イジング模型 $\mathcal{M}_3$, $c=\frac{1}{2}$

ユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_3$ は臨界イジング模型に同定される．すなわち，2 次元格子上のハミルトニアン

$$H = -\frac{J}{2}\sum_{i,j}\sigma_i\sigma_j \tag{2.38}$$

で与えられる統計力学系の臨界現象を記述する共形場理論である．

表 2.2 に見るように模型 $\mathcal{M}_3$ は 3 つのプライマリー場，$\mathbf{1},\sigma,\varepsilon$ を持つ．σ はスピン演算子($h=\frac{1}{16}$)で格子上のスピン変数 $\sigma_i=\pm 1$ の連続極限と考えられる(イジング模型の自発磁荷の臨界指数が $\frac{1}{8}$ である．スピン演算子の指数は $\frac{1}{8}=h+\bar{h}=2h$ より $h=\frac{1}{16}$ が得られる)．またエネルギー演算子 ε は $h=\frac{1}{2}$ を持ち $\varepsilon_i=\sum_{j(\sim i)}\sigma_i\cdot\sigma_j$ の連続極限である(和は i の最近接格子点 j についてとる)．演算子積展開のもとでこれらの演算子が閉じていることが知られている．

(2) 3 重臨界イジング模型 $\mathcal{M}_4$, $c=\frac{7}{10}$

これはイジング模型の変種である．格子ハミルトニアンは

---

*1 ある場合には，非ユニタリなミニマル模型も可解な統計力学系の臨界現象に重要な役割を果たすことがある．

*2 これらの模型の統計力学系としてのより詳しい解説については，たとえば [6] を参照．

表 **2.3**　3 重臨界イジング模型 $\mathcal{M}_4$, $c=\dfrac{7}{10}$

$s=4$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{16}$	0
$s=3$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{1}{10}$
$s=2$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{3}{5}$
$s=1$	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{2}$
$h_{r,s}$	$r=1$	$r=2$	$r=3$

$s=4$	G	σ'	$\mathbf{1}$
$s=3$	t	σ	ε
$s=2$	ε	σ	t
$s=1$	$\mathbf{1}$	σ'	G
$h_{r,s}$	$r=1$	$r=2$	$r=3$

$$H=-\frac{J}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\sim j}}\sigma_i\sigma_j t_i t_j-\mu\sum_i t_i \tag{2.39}$$

となる．(2.39)には新しい自由度 $t_i\in\{0,1\}$ が存在し，系の分配関数はスピンについての和 $\{\sigma_i=\pm1\}$ 以外に，t_i についての和 $\{t_i=0,1\}$ を取ることによって定まる．t_i が全て 1 ならば，系は通常のイジング模型に帰着する．しかし，今ある t_i が 0 のときはスピン i とその近接スピンとの相互作用 $\sigma_i\sigma_j t_i t_j$ がハミルトニアンから脱落する．このため t_i は格子点 i の欠損の表す空孔作用素(vacancy operator)とみなすことができる．格子点が欠損する頻度は化学ポテンシャル μ でコントロールされる．

具体的に μ を変えることによって格子点の欠損の割合を変化させよう．欠損の割合が少なければ系の性質はイジング模型と変わらない．しかし，欠損の割合が増えてある臨界値に達すると系の性質が変化して新しい型の臨界現象が現れる．これが 3 重臨界点のイジング模型である．3 重臨界イジング模型の臨界指数 $h_{r,s}=h_{4-m,5-n}$，$(1\leq m\leq 3,\ 1\leq n\leq 4)$は表 2.3 にまとめてある．$t$ は空孔作用素 t_i の連続極限．また G は共形次元 $\dfrac{3}{2}$ のプライマリー場である．実は 3 重臨界イジング模型には $\mathcal{N}=1$ の超共形対称性が存在しており G はそのスーパー・カレントになっている(7.1.3 項参照)．

また，表 2.4 はユニタリ・ミニマル模型の $m=5$ の模型(3 状態ポッツ模型)を表す．

ここで任意のユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_m$ の相当する臨界現象を持つ統計力学系が常に存在するかどうか問題であるが，ヒューズ(Huse)[33] によりア

表 2.4 3 状態ポッツ模型 $\mathcal{M}_5$, $c=\frac{4}{5}$

$s=5$	3	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
$s=4$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{8}$
$s=3$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
$s=2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{13}{8}$
$s=1$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$	3
$h_{r,s}$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$

ンドリューズ(Andrews), バクスター(Baxter), フォレスター(Forrester)によって構成された可解格子模型 [34] がユニタリ・ミニマル模型と 1 対 1 に対応することが示された.

2.6 退化した場と微分方程式

ミニマル模型における特異ベクトルの存在は重要な役割を果たす. すなわち, 特異ベクトルの存在を用いて相関関数に関する微分方程式を導くことができる.

まず, ディセンダント場を挿入して得られる相関関数を考えよう. ディセンダント場の定義を用いると, 相関関数はエネルギー・運動量テンソル $T(z)$ とプライマリー場を用いて表される.

$$\begin{aligned}&\Big\langle (L_{-n}\phi)(z,\bar{z})\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_N(z_N,\bar{z}_N)\Big\rangle\\&\quad=\oint_{C_z}\frac{dw}{2\pi i}\frac{1}{(w-z)^{n-1}}\Big\langle T(w)\phi(z,\bar{z})\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_N(z_N,\bar{z}_N)\Big\rangle.\end{aligned}$$

$n>1$ の場合には $z=w$ に特異点があるため積分路 C_z を 1 点に縮めることはできない. そこで積分路をリーマン球面 $\mathbb{CP}^1$ に沿って 1 回転させ, 各 z_i を取り囲む積分路 C_{z_i} の和に変形しよう. このとき積分路の向きは逆転する(図 2.1 参照).

OPE を用いると

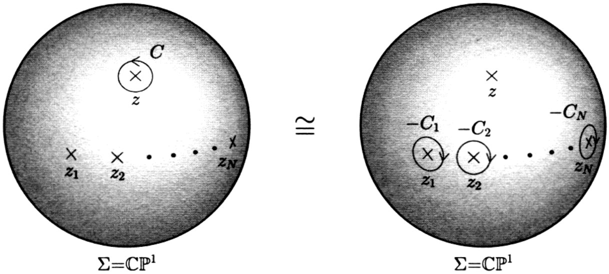


図 2.1　積分路の変形

$$\begin{aligned}
&\Big\langle (L_{-n}\phi)(z,\bar z)\phi_1(z_1,\bar z_1)\cdots\phi_N(z_N,\bar z_N)\Big\rangle \\
&\quad = -\sum_{j=1}^{N}\oint_{C_{z_j}}\frac{dw}{2\pi i}\frac{1}{(w-z)^{n-1}}\Big\langle T(w)\phi(z,\bar z)\phi_1(z_1,\bar z_1)\cdots\phi_N(z_N,\bar z_N)\Big\rangle \\
&\quad = -\sum_{j=1}^{N}\oint_{C_{z_j}}\frac{dw}{2\pi i}\frac{1}{(w-z)^{n-1}}\left\{\frac{h_j}{(w-z_j)^2}+\frac{1}{w-z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}\right\} \\
&\qquad\quad \times\Big\langle \phi(z,\bar z)\phi_1(z_1,\bar z_1)\cdots\phi_N(z_N,\bar z_N)\Big\rangle \\
&\quad = \sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{(n-1)h_j}{(z_j-z)^n}-\frac{1}{(z_j-z)^{n-1}}\frac{\partial}{\partial z_j}\right\} \\
&\qquad\quad \times\Big\langle \phi(z,\bar z)\phi_1(z_1,\bar z_1)\cdots\phi_N(z_N,\bar z_N)\Big\rangle .
\end{aligned}$$

まとめると，ディセンダント場 $L_{-n}\phi$ の挿入は，共形ウェイト h のプライマリー場 $\phi_h(w)$ に働く微分作用素；

$$\mathcal{L}_{-n} \equiv \frac{(n-1)h}{(w-z)^n}-\frac{1}{(w-z)^{n-1}}\frac{\partial}{\partial w}, \tag{2.40}$$

に置き換えることができる．

特異ベクトルの存在に戻ろう．以下，相関関数の正則部分に着目し，正則部分のプライマリー場を $\Phi_i(z_i)$ のように表す．バーマ加群 $V(c,h)$ がレベル 2 の特異ベクトル $|\chi\rangle$ (2.21) を含むとしよう．本節の冒頭で述べたように，特異ベクトルはバーマ加群の全てのベクトルと直交する．したがって，特異ベクトル $|\chi\rangle$ に対応するディセンダント場

$$X(z) \equiv (L_{-2}\Phi)(z)-\frac{3}{2(2h+1)}\frac{\partial^2}{\partial w^2}\Phi(w) \tag{2.41}$$

を含む任意の相関関数はゼロになる($\Phi(w)$ は共形ウェイト h のプライマリー場). ゆえに公式(2.40)を用いると次の 2 階の微分方程式が得られる；

$$\frac{3}{2(2h+1)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\langle\Phi_1(z)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_n(z_n)\right\rangle$$
$$=\sum_{i=2}^{n}\left\{\frac{h_i}{(z-z_i)^2}+\frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right\}\left\langle\Phi_1(z)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_n(z_n)\right\rangle. \qquad (2.42)$$

上の式を Φ の 4 点関数の場合に適用しよう. $SL(2,\mathbb{C})$ 不変性から 4 点関数の一般形は,

$$\langle\Phi(z_1)\Phi(z_2)\Phi(z_3)\Phi(z_4)\rangle=\frac{1}{\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\frac{4}{3}h}}F(\xi), \qquad \xi=\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)} \qquad (2.43)$$

となることを知っている. $F(\xi)$ の形自体は $SL(2,\mathbb{C})$ 不変性からは決めることはできない. しかし(2.42)は 2 階の常微分方程式

$$\left[\frac{3}{2(2h+1)}\frac{d^2}{d\xi^2}+\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{1-\xi}\right)\frac{d}{d\xi}-\left(\frac{h}{\xi^2}+\frac{2h}{\xi(1-\xi)}+\frac{h}{(1-\xi)^2}\right)\right]F(\xi)=0 \qquad (2.44)$$

に帰着し, その解はガウスの超幾何関数で与えられる [21].

一般に特異ベクトルが高さ N にあれば N 階の微分方程式を得る. こうした高いレベルの特異ベクトルの場合には, 相関関数にエネルギー・運動量テンソル T を何回も挿入して計算する必要が生じる. たとえば, 2 回挿入する場合は OPE (1.97)を用いて：

$$\left\langle T(z)T(w)\Phi_1(w_1)\Phi_2(w_2)\cdots\Phi_n(w_n)\right\rangle$$
$$=\left[\frac{2}{(z-w)^2}+\frac{1}{z-w}\frac{\partial}{\partial w}+\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{h_i}{(z-w_i)^2}+\frac{1}{z-w_i}\frac{\partial}{\partial w_i}\right\}\right]$$
$$\times\left\langle T(w)\Phi_1(w_1)\Phi_2(w_2)\cdots\Phi_n(w_n)\right\rangle$$
$$+\frac{c}{2}\frac{1}{(z-w)^4}\left\langle\Phi_1(w_1)\Phi_2(w_2)\cdots\Phi_n(w_n)\right\rangle \qquad (2.45)$$

を得る.

ミニマル模型ではプライマリー場ごとに2つの特異ベクトルが存在する．特異ベクトルひとつごとに微分方程式がひとつ得られるので，全体としては方程式の数が未知関数の数を上回る過剰決定系になる．こうして得られる微分方程式系については次の著しい性質が知られている．

- これらの微分方程式の系は互いに整合性を持ち，常に非自明な解が存在する．
- これらの微分方程式は有限個の確定特異点のみを持つフックス型であり，各特異点のまわりで収束するべき級数解を持つ．異なる特異点のまわりで収束する解は互いに解析接続で移りあう．
- ミニマル模型では微分方程式系は必ず有限次元の解空間を持つ(解の数が有限個である)．

この系の基本解は**共形ブロック**(conformal block)[21] と呼ばれる．共形ブロックについては，6.1 節で詳しく述べる．共形場の理論では相関関数は正則部分と反正則部分の積を共形ブロックについて足し上げた形を持つ．正則，反正則部分おのおのは特異点のまわりをまわるとき，モノドロミー変換を受けるが，その積の和ではモノドロミーが互いに打ち消しあい，物理的な相関関数は1価になるよう構成される(詳しくは [23] 参照)．

3

カレント代数と ウェス・ズミノ・ウィッテン模型

この章では重要な共形場の理論であるウェス・ズミノ・ウィッテン(Wess-Zumino-Witten; WZW)模型について議論しよう [35]. WZW 模型は共形不変性に加え，カレント代数(アフィン・カッツ・ムーディー代数 [10])の対称性も持っており応用も広い．弦理論においては，カレント代数は時空のゲージ対称性を記述するために基本的な重要性を持つ.

3.1 カレント

一般の d 次元ユークリッド時空においては，**カレント**はベクトル量(あるいは 1 形式)で次の保存則を満たす；

$$\sum_{\mu=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x^\mu} J_\mu(x^1, \cdots, x^d) = 0. \tag{3.1}$$

今，2 次元時空においてカレントは保存則を満たすとともにその rotation もゼロとなることを要求しよう.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^1} J_1(x^1, x^2) + \dfrac{\partial}{\partial x^2} J_2(x^1, x^2) = 0 & (\text{保存則}), \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} J_2(x^1, x^2) - \dfrac{\partial}{\partial x^2} J_1(x^1, x^2) = 0 & (\text{渦なし}). \end{cases} \tag{3.2}$$

複素座標 $z = x^1 + ix^2$, $\bar{z} = x^1 - ix^2$, 及び

$$J_1 dx^1 + J_2 dx^2 = J_z dz + J_{\bar{z}} d\bar{z}, \tag{3.3}$$

$$\text{すなわち}\quad J_z \equiv \frac{1}{2}(J_1 - iJ_2), \quad J_{\bar{z}} \equiv \frac{1}{2}(J_1 + iJ_2),$$

を用いると関係式(3.2)は正則関数に関するコーシー・リーマン方程式に一致することがわかる．すなわち，カレント $J_z\,(J_{\bar{z}})$ は正則(反正則)である；

$$\partial_{\bar{z}} J_z = 0, \quad \partial_z J_{\bar{z}} = 0. \tag{3.4}$$

以下，$J(z) \equiv J_z(z)$, $\widetilde{J}(\bar{z}) \equiv J_{\bar{z}}(\bar{z})$ と書くことにする．

コンパクト群 G の対称性を考えよう．G としては $SU(2)$, $SU(N)$ あるいは $SO(N)$ などを考える．$\mathfrak{g}$ を群 G のリー代数としよう[*1]．そしてリー代数 $\mathfrak{g}$ に値をとるカレント $J_\mu(x^1, x^2)$ を導入する．リー代数の基底を $\{T^a \mid a{=}1, \cdots, \dim G\}$ とし，その交換関係を

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c, \tag{3.5}$$

としよう．$f^{ab}{}_c$ は構造定数である．簡単のため群 G が半単純な場合を考えよう．この場合には非退化な 2 次形式(カルタン・キリング(Cartan-Killing)形式) $g: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ が定数を除いて一意に定まる．通常カルタン・キリング形式は θ を $\mathfrak{g}$ の最高ルート(＝随伴表現の最高ウェイト)としたとき，$g(\theta, \theta) = 2$ と規格化される．$SU(N)$ などでは単純に基本表現による行列表示を用いて，

$$g(u, v) = \mathrm{Tr}(uv), \quad (u, v \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}) \tag{3.6}$$

と考えてもよい．

リー代数 $\mathfrak{g}$ の基底を用いて，カレント J_μ の成分を導入する；

$$J_\mu \equiv \sum_a J_\mu^a T_a, \quad (g(T^a, T_b) = \delta^a_b). \tag{3.7}$$

すなわち，

$$J_\mu^a = g(T^a, J_\mu). \tag{3.8}$$

これらの成分を空間積分して保存電荷が得られる；

$$Q^a \equiv \int_{-\infty}^{\infty} J_1^a(x^1, x^2) dx^2, \qquad a = 1, \cdots, \dim G. \tag{3.9}$$

---

*1 物理の文献ではしばしば，リー群とそのリー代数を同じ記号で表す．ここでは混乱を避けるためリー群 G とリー代数 $\mathfrak{g}$ を区別して表す．

場の量子論の一般論に従い，これらの電荷 Q^a はリー群 G の対称性を生成する．Q^a は交換関係

$$[Q^a, Q^b] = if^{ab}{}_c Q^c \tag{3.10}$$

を満たし，演算子による(3.5)の実現を与える．

3.2 カレント代数

正則なカレント $J^a(z)$，反正則なカレント $\widetilde{J}^a(\bar{z})$ がそれぞれ共形次元 $(1,0)$ と $(0,1)$ を持つ共形場理論を考察しよう．このときカレントの経路に沿う積分は共形変換で不変な意味を持つ．

3.2.1 カレントの交換関係

以下では量子化されたカレントを考える．正則なカレントは OPE のもとで閉じた関係を持つと仮定しよう．すると次元解析からカレントの OPE は次の形を持つことがわかる；

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{\kappa^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{i\tilde{f}^{ab}{}_c\, J^c(w)}{z-w}. \tag{3.11}$$

ここで c 数 κ^{ab} は添え字 a, b に関して対称，また $\tilde{f}^{ab}{}_c$ は a, b に関して反対称である．

エネルギー・運動量テンソル $T(z)$ のときのように，カレント $J^a(z)$ のローラン展開を考えよう；

$$J^a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J^a_n z^{-n-1}. \tag{3.12}$$

あるいは

$$J^a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint z^n J^a(z) dz. \tag{3.13}$$

電荷はゼロ・モード $Q^a{=}J^a_0$ として定義される．カレント代数作用素 $\{J^a_n \mid n \in\mathbb{Z}, a{=}1, \cdots, \dim G\}$ によって生成される無限次元リー代数である．ビラソロ代数の計算(1.107)と同様に，OPE (3.11)と公式(1.84)を用いて J^a_n の交換関

係を計算できる；

$$\begin{aligned}[J_n^a, J_m^b] &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{w=0} dw\, w^m \oint_{z=w} dz\, z^n J^a(z) J^b(w) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{w=0} dw\, w^m \oint_{z=w} dz\, z^n \left\{ \frac{\kappa^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{i\tilde{f}^{ab}{}_c\, J^c(w)}{z-w} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{w=0} dw\, \left(w^{n+m-1} n\kappa^{ab} + w^{n+m} i\tilde{f}^{ab}{}_c\, J^c(w) \right) \\ &= n\kappa^{ab}\delta_{n+m,0} + i\tilde{f}^{ab}{}_c\, J^c_{n+m}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

したがって次の交換関係を得る；

$$[J_n^a, J_m^b] = i\tilde{f}^{ab}{}_c\, J^c_{n+m} + \kappa^{ab} n\delta_{n+m,0}. \tag{3.15}$$

これがカレント代数である．ここで $n=m=0$ の場合を考えるとカレント代数はリー代数の交換関係

$$[Q^a, Q^b] = if^{ab}{}_c Q^c \tag{3.16}$$

に帰着するはずである．したがって $\tilde{f}^{ab}{}_c$ はリー代数 $\mathfrak{g}$ の構造定数 $f^{ab}{}_c$ と一致しなければならない．OPE の結合律あるいは，(3.15)から得られるヤコビの恒等式を用いると κ^{ab} がリー環の作用で不変であることがわかる．すなわち，

$$f^{ab}{}_d \kappa^{dc} = \kappa^{ad} f^{bc}{}_d \tag{3.17}$$

が成り立つ．半単純リー環 G では，不変な 2 次形式はカルタン・キリング形式に限られる．したがって

$$\kappa^{ab} = kg^{ab} \tag{3.18}$$

ここで k は実数でカレント代数のレベルと呼ばれる．$g^{ab} \equiv g(T^a, T^b)$ はカルタン・キリング形式である．

まとめるとカレント代数の交換関係は，

$$[J_n^a, J_m^b] = if^{ab}{}_c\, J^c_{n+m} + kg^{ab} n\delta_{n+m,0} \tag{3.19}$$

で与えられ，数学では**アフィン・カッツ・ムーディー代数**(affine Kac-Moody

algebra)，または，**アフィン・リー代数**(affine Lie algebra)と呼ばれる．アフィン・リー代数の数学的により正確な定義については 4.3 節を参照してほしい．G がコンパクト群の場合には以下に見るようにレベル k は整数値を取る．

標準的な直交基底 $\{T^a \mid a=1,\cdots,\dim G\}$ では，内積 g は

$$g^{ab} \equiv g(T^a, T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{3.20}$$

と規格化される[*2]．すると

$$f^{abc} \equiv f^{ab}{}_d g^{dc} \tag{3.21}$$

は完全反対称テンソルになる．またこのとき

$$[J^a_n, J^b_m] = if^{ab}{}_c J^c_{n+m} + \frac{k}{2}\delta^{ab} n\delta_{n+m,0}, \tag{3.22}$$

すなわち，OPE で表すと，

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{\frac{k}{2}\delta^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{if^{ab}{}_c J^c(w)}{z-w}, \tag{3.23}$$

を得る．

(3.22)，(3.23)はカレント代数の対称性を持つ共形場理論における基本的な関係式である．この節では，群 G の対称性と正則カレント $J^a(z)$ が閉じた OPE をなすという仮定からこれらを導いたが，3.3 節では具体的にラグランジアンを持つ場の理論からこれらを導く．

例　$G=SU(2)$

$SU(2)$ のリー環の基底を $T^a \equiv \frac{\sigma_a}{2}$ $(a=1,2,3)$ と取る(σ_a はパウリ行列)．すなわち，

---

*2　したがって，

$$g_{ab} \equiv g(T_a, T_b) = 2\delta_{ab}, \quad T_a = 2T^a,$$

が成り立つ．

$$T^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad T^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

カルタン・キリング形式は

$$g(T^a, T^b) \equiv \mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}, \qquad a, b = 1, 2, 3, \tag{3.25}$$

で与えられる．交換関係はよく知られた $[T^a, T^b]=i\epsilon^{abc}T^c$ である．ここで $\epsilon^{abc}=\pm 1$ は完全反対称テンソルである．対応するカレントの OPE (3.11) は

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{\frac{k}{2}\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \frac{i\epsilon^{abc}J^c(w)}{z-w}, \tag{3.26}$$

となる．

3.2.2 プライマリー場，プライマリー状態

カレント代数の対称性を持つ共形場理論におけるプライマリー場，及びプライマリー状態を与えておこう．カレント代数のゼロ・モード J_0^a は群 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ をなすので，プライマリー場として $\mathfrak{g}$ の表現に属するものを考えるのが自然であろう．そこで，一般に「$\mathfrak{g}$ の表現 $\mathcal{R}$ に属するプライマリー場 $\phi_i(z)$ $(i=1, \cdots, \dim\mathcal{R})$」を，次の OPE を持つものと定義する．

$$J^a(z)\phi_i(w) \sim \frac{1}{z-w}\mathcal{R}(T^a)^j{}_i\phi_j(w). \tag{3.27}$$

ここで $\mathcal{R}(T^a)^i{}_j$ はリー環の基底 T^a の表現行列である（添え字の位置に注意）．

さらに対応するプライマリー状態 $|\phi_i\rangle$ を，

$$|\phi_i\rangle \equiv \lim_{z\to 0}\phi_i(z)|0\rangle, \tag{3.28}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned} J_n^a|\phi_i\rangle &= 0, \quad ({}^\forall n > 0), \\ J_0^a|\phi_i\rangle &= \mathcal{R}(T^a)^j{}_i|\phi_j\rangle, \end{aligned} \tag{3.29}$$

が成立する．期待通り $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1,\cdots,\dim\mathcal{R}}$ は，ゼロ・モード代数 $\{J_0^a\}\cong\mathfrak{g}$ に対し表現 $\mathcal{R}$ をなす．実際(3.29)のもとで，

$$[J_0^a, J_0^b]|\phi_i\rangle = \left\{\mathcal{R}(T^a)^j{}_k\mathcal{R}(T^b)^k{}_i - \mathcal{R}(T^b)^j{}_k\mathcal{R}(T^a)^k{}_i\right\}|\phi_j\rangle$$
$$\equiv \mathcal{R}([T^a, T^b])^j{}_i|\phi_j\rangle, \tag{3.30}$$

が成立することがわかる．

3.3 ウェス・ズミノ・ウィッテン模型

カレント代数の対称性を実現する共形場理論として**ウェス・ズミノ・ウィッテン(WZW)模型**が有名である [35]．この節では，ウェス・ズミノ・ウィッテン模型の基本的な性質を解説する．

3.3.1 ウェス・ズミノ・ウィッテン模型の作用

WZW 模型の基本的な場を $g(z,\bar{z})$ で表そう．場 $g(z,\bar{z})$ は 2 次元面 Σ からリー群 G への写像：$\Sigma\to G$ である．レベル k の WZW 模型は作用

$$S = kI(g), \tag{3.31}$$

で与えられる．ここで

$$I(g) = I_0(g)+\Gamma_{\mathrm{WZ}}(g), \tag{3.32}$$
$$I_0(g) \equiv \frac{1}{8\pi}\int_\Sigma d^2x\,\mathrm{Tr}(\partial_\alpha g\partial_\alpha g^{-1}), \tag{3.33}$$
$$\Gamma_{\mathrm{WZ}}(g) \equiv -\frac{i}{12\pi}\int_B \mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}) \tag{3.34}$$

である．$I_0(g)$ は標準的な群多様体 G 上の非線形シグマ模型(主カイラル模型)の作用である．$\Gamma_{\mathrm{WZ}}(g)$ はウェス・ズミノ項(WZ 項)と呼ばれる．係数の i が奇妙に見えるかもしれないが，これは世界面をユークリッド化しているためである*3．WZ 項は境界を 2 次元面 Σ に持つ 3 次元の領域 B 上で積分される．B 上の場の値 $\tilde{g}$ は Σ 上での g の値をスムースに延長したものである*4．

WZW 模型が 3 次元多様体 B の選び方によらず well-defined であることは

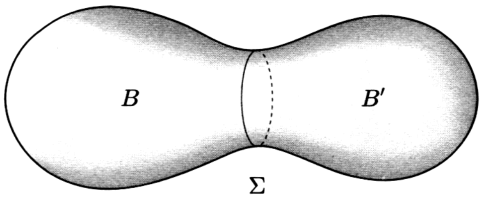


図 3.1　3 次元多様体 $B''=B\cup B'$

次のようにして示される．境界を Σ に持つ，もう 1 つの 3 次元多様体 B' が存在したとしよう．B 上の積分と B' 上の積分の差は，B と B' を共通の境界 Σ で張り合わせてできる境界を持たない 3 次元多様体 B'' 上の積分で表される（図 3.1 参照）．

このとき被積分量 $\mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g})$ は閉じた 3 形式である．実際，$d(\tilde{g}^{-1})=-\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\tilde{g}^{-1}$ を用いると，

$$
\begin{aligned}
&d\mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g})\\
&\quad= \mathrm{Tr}(d(\tilde{g}^{-1})\wedge d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g})\\
&\qquad -\mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge d(\tilde{g}^{-1})d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g})+\mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge d(\tilde{g}^{-1})\wedge d\tilde{g})\\
&\quad= \mathrm{Tr}(d(\tilde{g}^{-1})\wedge d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g})\\
&\quad= -\mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}) = 0
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

となることがわかる．最後の行では，トレースの性質より，$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N$ を行列に値を持つ 1 形式であるとすると，$\mathrm{Tr}(\omega_1\cdots\omega_N)=(-1)^{N-1}\mathrm{Tr}(\omega_N\omega_1\cdots\omega_{N-1})$ が成り立つことを用いた．微分形式の理論によると，閉じた 3 形式 ω の境界を持たない 3 次元多様体 M 上の積分は，M のホモロジー・クラスのみに依存し，3 形式を適当に規格化することにより積分値は整数になる．すな

＊3　一般にウィック回転を行いユークリッド化した際に純虚数となるのは作用の**トポロジカル項**の特徴であり，場の理論でよく知られた例として，ヤン・ミルズ理論の θ 項やチャーン・サイモン項などがある．弦理論の作用においては，カルプ・ラモン反対称場 $B_{\mu\nu}$ との結合項がこの性質を持つ（5.5.2 項参照）．

＊4　厳密には Σ 上の値が常に B までスムースに延長できるとは限らない．このためには位相的な条件 $H_2(G)=0$ が必要である．ここで $H_2(G)$ は G の 2 次のホモロジー群である．今はこの条件が成り立つと仮定する．

わち

$$\int_M \omega \in \mathbb{Z}, \quad d\omega = 0, \quad \partial M = 0. \tag{3.36}$$

WZ 項の前の係数は 3 形式 $\mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g})$ の積分が 整数$\times 2\pi i$ になるように選んである．したがって

$$\begin{aligned}&\frac{-i}{12\pi}\int_B \mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g})\\ &\quad = \frac{-i}{12\pi}\int_{B'} \mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}\wedge\tilde{g}^{-1}d\tilde{g})+2\pi i n, \quad (n\in\mathbb{Z})\end{aligned} \tag{3.37}$$

を得る．このため，B を B' に取り替えると，WZW 模型の作用は $2\pi ikn$ だけ変化する．一方，ユークリッド計量の経路積分は重み e^{-S} を持つ．このため作用が $2\pi i$ の整数倍変化しても，重み e^{-S} は不変である．したがってコンパクト群に対する WZW 模型は**レベル k が整数値を持つときにのみ**定義され，領域 B の取り方によらず一意に定まる．このように，レベル k が位相的な理由で量子化される点は興味深い．さらに作用の運動エネルギー項 $kI_0(g)$ が正定値であるためには，$k>0$ でなければならない[*5]．

WZW 模型の運動方程式と古典解を求めてみよう．式(3.33)の $I_0(g)$，及び $\Gamma_{\mathrm{WZ}}(g)$ (3.34)の変分は次のように計算される；

$$\delta I_0(g) = \frac{1}{4\pi}\int d^2x\,\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\delta g\partial_\alpha(g^{-1}\partial_\alpha g)\right), \tag{3.38}$$

$$\delta\Gamma_{\mathrm{WZ}}(g) = \frac{i}{4\pi}\int d^2x\,\epsilon_{\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\delta g\partial_\alpha(g^{-1}\partial_\beta g)\right). \tag{3.39}$$

これより，

$$\delta I(g) = \frac{1}{\pi}\int d^2x\,\mathrm{Tr}\left(g^{-1}\delta g\partial_z\left(g^{-1}\partial_{\bar{z}}g\right)\right)$$

---

*5　一般に非コンパクト群に対する WZW 模型においては，コンパクト群の場合と異なり，レベル k の符号をどのように選んでも運動エネルギー項を正定値にすることはできない．しかしながら，そうした模型もローレンツ計量を持つ曲がった背景上の弦理論を研究する上での重要性を持っている．たとえば，よく知られているように，AdS_3 空間上の弦理論は $SL(2,\mathbb{R})$ の WZW 模型で記述される．

$$= \frac{1}{\pi} \int d^2x \, \mathrm{Tr} \left(\delta g g^{-1} \partial_{\bar{z}} \left(\partial_z g g^{-1} \right) \right), \tag{3.40}$$

が得られ，運動方程式は

$$\partial_z \left(g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \right) = 0, \quad \partial_{\bar{z}} \left(\partial_z g g^{-1} \right) = 0, \tag{3.41}$$

となる．これらの方程式の一般解は容易に求められる；

$$g(z, \bar{z}) = g_L(z) g_R(\bar{z}). \tag{3.42}$$

ここで，$g_L(z)$，$g_R(\bar{z})$ は G に値を取る任意の正則，反正則な関数である．古典解(3.42)が示唆するように，WZW 作用 $I(g)$ は，自明に存在する大域的な対称性

$$g(z, \bar{z}) \mapsto \Omega g(z, \bar{z}) \Omega^{-1}, \quad ({}^\forall \Omega \in G), \tag{3.43}$$

のみならず，**局所的な**対称性

$$g(z, \bar{z}) \mapsto \Omega_L(z) g(z, \bar{z}) \Omega_R(\bar{z})^{-1}, \tag{3.44}$$

を持つ．ただし $\Omega_L(z)$ ($\Omega_R(\bar{z})$) は任意の G に値を持つ正則(反正則)な関数である．以下，この局所対称性を $G_L(z) \times G_R(\bar{z})$ を表すことにしよう．作用 $I(g)$ が実際に変換(3.44)のもとで不変であることは，ポリアコフ・ウィグマン(Polyakov-Wiegmann)恒等式 [36]

$$I(gh) = I(g) + I(h) - \frac{1}{\pi} \int_\Sigma d^2x \, \mathrm{Tr}(g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \partial_z h h^{-1}), \tag{3.45}$$

からただちに示すことができる．次項で議論するが，WZW 模型の基本的な性質は全てこの恒等式から導くことができる．

局所対称性 $G_L(z)$，及び $G_R(\bar{z})$ はそれぞれ(定数倍を除き)カレント $J_z \equiv -\partial_z g g^{-1}$，$J_{\bar{z}} \equiv g^{-1} \partial_{\bar{z}} g$ によって生成される．この事実は次項で詳しく解説しよう．運動方程式(3.41)により，これらのカレントは期待通り，

$$\partial_{\bar{z}} J_z = 0, \quad \partial_z J_{\bar{z}} = 0,$$

を満足している．

最後にポリアコフ・ウィグマン恒等式の証明を述べておこう．ϵ を微小な実数，$u_i(x)$ を任意のリー環 $\mathfrak{g}$ に値を取る Σ 上の関数として，$g_i(x)=e^{i\epsilon u_i(x)}$ とおく．そして，

$$g(x) \equiv g_N(x)g_{N-1}(x)\cdots g_1(x) \tag{3.46}$$

とおく．証明は N についての数学的帰納法による．まず変分公式(3.40)により，

$$I(g_1 h) = I(h) - \frac{i\epsilon}{\pi}\int_\Sigma d^2x \,\mathrm{Tr}\left(\partial_{\bar{z}} u_1 \partial_z h h^{-1}\right) + O(\epsilon^2),$$

が成り立つので，$N=1$ は O.K. である($I(g_1)=O(\epsilon^2)$ に注意)．次に $g(x)$ を(3.46)として，$\hat{g}\equiv g_{N+1}g$ とおくと，(3.40)と帰納法の仮定を用いて，

$$\begin{aligned}
I(\hat{g}h) &= I(g_{N+1}(gh)) = I(gh) - \frac{i\epsilon}{\pi}\int_\Sigma d^2x\,\mathrm{Tr}\left(\partial_{\bar{z}} u_{N+1}\partial_z(gh)(gh)^{-1}\right) + O(\epsilon^2)\\
&= I(g)+I(h) - \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2x\,\mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_{\bar{z}} g \partial_z h h^{-1}) - \frac{i\epsilon}{\pi}\int_\Sigma d^2x\,\mathrm{Tr}\left(\partial_{\bar{z}} u_{N+1}\partial_z g g^{-1}\right)\\
&\quad - \frac{i\epsilon}{\pi}\int_\Sigma d^2x\,\mathrm{Tr}\left(\partial_{\bar{z}} u_{N+1} g \left(\partial_z h h^{-1}\right) g^{-1}\right) + O(\epsilon^2)\\
&= I(\hat{g})+I(h) - \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2x\,\mathrm{Tr}(\hat{g}^{-1}\partial_{\bar{z}}\hat{g}\partial_z h h^{-1}) + O(\epsilon^2),
\end{aligned}$$

を得る．最後の行に移行する際に，

$$I(\hat{g}) = I(g) - \frac{i\epsilon}{\pi}\int_\Sigma d^2x\,\mathrm{Tr}\left(\partial_{\bar{z}} u_{N+1}\partial_z g g^{-1}\right) + O(\epsilon^2),$$

及び，

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{g}^{-1}\partial_{\bar{z}}\hat{g}\partial_z h h^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(g^{-1}\partial_{\bar{z}} g\partial_z h h^{-1}\right) + i\epsilon\mathrm{Tr}\left(\partial_{\bar{z}} u_{N+1} g\left(\partial_z h h^{-1}\right) g^{-1}\right),$$

を用いた．以上より数学的帰納法が完成したので，$N\to\infty$, $\epsilon\to+0$ の極限を取ることによりポリアコフ・ウィグマン恒等式(3.45)が証明されることとなる．

コメント **WZW 模型のスケール不変性** 古典的な運動方程式(3.41)は，WZW 模型が共形不変性を持つことを示唆しているが，実際に量子論のレベルでそれが正しいことは，結合定数 e を入れた非線形シグマ模型

$$S_{e,k}(g) \equiv \frac{1}{2e^2}\int_\Sigma d^2x\, \mathrm{Tr}\left(\partial_\alpha g \partial_\alpha g^{-1}\right) + k\Gamma_{\mathrm{WZ}}(g), \tag{3.47}$$

の e に関するベータ関数を摂動的に計算することで示すことができる [35]. スケール不変性を示すくりこみ群の固定点は,

$$e^2 = \frac{4\pi}{k}, \quad (k>0), \tag{3.48}$$

$$e^2 = \frac{4\pi}{|k|}, \quad (k<0), \tag{3.49}$$

に存在し, (3.48)がここでの WZW 模型(3.32)に対応している. 非線形シグマ模型(3.47)は, 一般的な結合定数 e に対して大域的な対称性(3.43)を持つが, 特別な値(3.48)に対しては, 局所対称性 $G_L(z)\times G_R(\bar{z})$ (3.44)にまで拡大するという点が重要であり, この事実により量子論のレベルでも厳密に共形不変性が成り立っていると考えられている.

ところで 2 つ目の固定点(3.49)は, 作用を

$$S(g) = k\widetilde{I}(g), \quad (k\in\mathbb{Z}_{>0}), \tag{3.50}$$

$$\widetilde{I}(g) = I_0(g) - \Gamma_{\mathrm{WZ}}(g), \tag{3.51}$$

と選ぶことに相当する. 容易にわかるように $\widetilde{I}(g)=I(g^{-1})$ が成り立ち, また $\widetilde{I}(g)$ に対する変分公式, 運動方程式は(3.40), (3.41)で z と $\bar{z}$ を入れ替えたものとして与えられる. したがってこの模型では, 上とは異なった局所対称性：$G_L(\bar{z})\times G_R(z)$ を持ち, カレントは(定数倍を除き),

$$\widetilde{J}_z = g^{-1}\partial_z g, \quad \widetilde{J}_{\bar{z}} = -\partial_{\bar{z}} g g^{-1}, \tag{3.52}$$

と与えられることとなる.

3.3.2 ウェス・ズミノ・ウィッテン模型におけるカレント代数

本項では具体的に WZW 模型からカレント代数(3.23)を導いてみよう. 再びワード・高橋恒等式を利用すると見通しがよい. 1.4 節では共形対称性を考えたが, ここでは $G_L(z)\times G_R(\bar{z})$ 対称性に対するワード・高橋恒等式を考察する.

$S(g)=kI(g)$ をレベル k $(\in\mathbb{Z}_{>0})$ の WZW 模型の作用とし, $F[g]$ を任意の G に値を取る Σ 上の関数 $g(x)$ の汎関数としよう. このとき経路積分を用いて,

$$\langle F[g]\rangle \equiv \int \mathcal{D}g\, F[g] e^{-S(g)}, \tag{3.53}$$

と定義する．少々天下り的であるが，以下 WZW 模型のカレントを

$$J(z) \equiv J^a(z)T_a \equiv -k\partial g g^{-1}, \quad \widetilde{J}(\bar{z}) \equiv \widetilde{J}^a(\bar{z})T_a \equiv k g^{-1}\bar{\partial} g, \tag{3.54}$$

と定義する．前述のように T_a は T^a の双対基底であり，$\mathrm{Tr}(T^a T_b)=\delta^a_b$，$\mathrm{Tr}(T_a T_b)\equiv g_{ab}=2\delta_{ab}$ を満たす．

今 $u(x)$ を任意の $\mathfrak{g}$ に値を取る Σ 上の関数とし(正則性・反正則性は仮定しない)，変換

$$g(x) \mapsto e^{itu(x)}g(x), \quad g(x) \mapsto g(x)e^{-itu(x)}$$

を考える．$t\in\mathbb{R}$ はパラメータである．便宜的に，

$$\delta^L_u F[g] \equiv \left.\frac{d}{idt}F[e^{itu}g]\right|_{t=0}, \tag{3.55}$$

$$\delta^R_u F[g] \equiv \left.\frac{d}{idt}F[ge^{-itu}]\right|_{t=0}, \tag{3.56}$$

と表す．これらの変換によって積分変数 g を変換しても関数積分の値は不変である．関数積分測度 $\mathcal{D}g$ も不変であるので，恒等式

$$\langle \delta^L_u F[g] - F[g]\delta^L_u S(g)\rangle = 0, \quad \langle \delta^R_u F[g] - F[g]\delta^R_u S(g)\rangle = 0$$

が得られる．ここでポリアコフ・ウィグマン恒等式(3.45)を用いて，おのおのの $\delta^L_u S(g)$，$\delta^R_u S(g)$ を計算し，カレントの定義(3.54)を用いると，求めるワード・高橋恒等式として，

$$\frac{1}{\pi}\int d^2x\, \left\langle \mathrm{Tr}(u(x)\bar{\partial}J(x))F[g]\right\rangle = -\langle \delta^L_u F[g]\rangle, \tag{3.57}$$

$$\frac{1}{\pi}\int d^2x\, \langle \mathrm{Tr}(u(x)\partial\widetilde{J}(x))F[g]\rangle = -\langle \delta^R_u F[g]\rangle, \tag{3.58}$$

が導かれる．さらに u が正則であり，$F[g]$ が点 $(w,\bar{w})$ に挿入された局所場である場合は，ストークスの定理を用いて(3.57)は，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_w dz\langle \mathrm{Tr}(u(z)J(z))F[g](w)\rangle = -\langle \delta_u^L F[g](w)\rangle, \qquad (3.59)$$

と書き直すことができる．これは $G_L(z)$ に対するワード・高橋恒等式と解釈される．同様に u が反正則の場合は，$G_R(\bar{z})$ に対するワード・高橋恒等式として，

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\bar{w}} d\bar{z}\langle \mathrm{Tr}(u(\bar{z})\widetilde{J}(\bar{z}))F[g](\bar{w})\rangle = -\langle \delta_u^R F[g](w)\rangle, \qquad (3.60)$$

が得られることとなる．

さて，$F[g]$ として正則カレント $J(w)$ 自身を選んでみよう．定義よりただちに

$$\delta_u^L J(w) = [u(w,\bar{w}), J(w)] - k\partial u(w,\bar{w}),$$

であることがわかる．u は任意であるから，ワード・高橋恒等式(3.57)より，

$$\frac{1}{\pi}\int d^2z\,\langle \bar{\partial} J^a(z)J^b(w)\rangle = if^{ab}{}_c\langle J^c(w)\rangle\delta^2(z-w) + \frac{k}{2}\delta^{ab}\partial_w\delta^2(z-w),$$

が得られる．この恒等式は正則カレント $J^a(z)$ の OPE；

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{if^{ab}{}_c J^c(w)}{z-w} + \frac{\frac{k}{2}\delta^{ab}}{(z-w)^2} \qquad (3.61)$$

と解釈され，こうして求める公式(3.23)が導かれた．全く同様に，

$$\delta_u^R \widetilde{J}(\bar{w}) = [u(w,\bar{w}), \widetilde{J}(\bar{w})] - k\bar{\partial} u(w,\bar{w}),$$

がわかるので，(3.58)より反正則カレント $\widetilde{J}^a(\bar{z})$ の OPE；

$$\widetilde{J}^a(\bar{z})\widetilde{J}^b(\bar{w}) \sim \frac{if^{ab}{}_c \widetilde{J}^c(\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \frac{\frac{k}{2}\delta^{ab}}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \qquad (3.62)$$

が導かれる．また，$\delta_u^R J(z)=0$, $\delta_u^L \widetilde{J}(\bar{z})=0$ が成り立つので，

$$J^a(z)\widetilde{J}^b(\bar{w}) \sim 0,$$

すなわち，カレント $J^a(z)$ と $\widetilde{J}^b(\bar{w})$ は可換である．

次に $\mathcal{R}$ をリー群 G の表現とし，

$$\Phi^i{}_j(z,\bar{z}) \equiv \langle i|\mathcal{R}(g(z,\bar{z})^{-1})|j\rangle, \quad (i,j=1,\cdots,\dim\mathcal{R}) \tag{3.63}$$

とおく．このとき，

$$\delta_u^L \Phi^i{}_j(z,\bar{z}) = -\mathcal{R}(u)^k{}_j \Phi^i{}_k(z,\bar{z}), \tag{3.64}$$

$$\delta_u^R \Phi^i{}_j(z,\bar{z}) = \mathcal{R}(u)^i{}_k \Phi^k{}_j(z,\bar{z}), \tag{3.65}$$

が成立するので，ワード・高橋恒等式(3.59)，(3.60)より，次の OPE が導かれる；

$$J^a(z)\Phi^i{}_j(w,\bar{w}) \sim \frac{\mathcal{R}(T^a)^k{}_j}{z-w}\Phi^i{}_k(w,\bar{w}), \tag{3.66}$$

$$\widetilde{J}^a(\bar{z})\Phi^i{}_j(w,\bar{w}) \sim -\frac{\mathcal{R}(T^a)^i{}_k}{\bar{z}-\bar{w}}\Phi^k{}_j(w,\bar{w}). \tag{3.67}$$

これは，$\Phi^i{}_j(w,\bar{w})$ が，正則カレント $\{J^a(z)\}$ に対しては表現 $\mathcal{R}$ に属するプライマリー場，反正則カレント $\{\widetilde{J}^a(\bar{z})\}$ に対しては $\overline{\mathcal{R}}(u) \equiv -\mathcal{R}(u)^T\,(u \in \mathfrak{g})$ で定義される $\mathcal{R}$ の反傾表現*6に属するプライマリー場であることを表している．

全く同様に，

$$\widetilde{\Phi}^i{}_j(z,\bar{z}) \equiv \langle i|\mathcal{R}(g(z,\bar{z}))|j\rangle, \quad (i,j=1,\cdots,\dim\mathcal{R}) \tag{3.68}$$

は，$\{J^a(z)\}$ に対しては $\overline{\mathcal{R}}$，$\{\widetilde{J}^a(\bar{z})\}$ に対しては $\mathcal{R}$ に属するプライマリー場となることがわかる．このようにして WZW 模型において具体的にカレント代数に対するプライマリー場が構成された．

3.4 菅原構成法

本節では G を単純リー群であるとし，そのリー代数を $\mathfrak{g}$ とする．共形場の理論をカレント代数から構成するためにはエネルギー・運動量テンソルをカレ

*6 $\mathcal{R}$ がユニタリ表現である場合，反傾表現は複素共役表現と一致する．

ントを用いて構成する必要がある．周知のようにエネルギー・運動量テンソルは2階の対称テンソルで時空の微分同相の生成子である．一方，リー代数の表現論においては2次のカシミア演算子が重要な働きを持つ．カシミア演算子はリー環の生成子を用いて

$$g_{ab}J^aJ^b \tag{3.69}$$

と表されリー代数 $\mathfrak{g}$ の全ての生成子と交換する．これらの考察から菅原はカレントの2次式で与えられる次の形のエネルギー・運動量テンソルを導入した [37]*7；

$$T_{\mu\nu}(x) \equiv g_{ab}J^a_\mu J^b_\nu - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}g_{ab}J^{a\,\lambda}J^b_\lambda. \tag{3.70}$$

$J^a_\mu(x)$ を古典的な量として取り扱うと，こうして定義したエネルギー・運動量テンソルは以前に見た性質(1.40)を満たしている．

場の量子論では，同一点における2つの場の作用素の積は特異性を持ち，そのままでは正しく定義されない．このため特異性をとり除いて有限な積を定義する必要がある．関係(3.11)を用いるとすぐわかるように

$$\sum_{a=1}^{\dim G} J^a(w)J^a(z) = \frac{(k/2)\dim G}{(w-z)^2} + \text{reg.} \tag{3.71}$$

を得る(「reg.」は正則項を表す)．$\dim G$ は群 G の次元(生成子の数)である．ここで，正則項は $w\to z$ のとき有限に留まる．右辺第1項は $w\to z$ で2次発散するが，演算子ではなく c 数である．このために容易に取り除くことができる．カレントの2乗 $J^a(z)^2$ から発散する c 数を取り除いてその**正規積**(normal-ordered product) $:J^a(z)^2:$ を次のように定義しよう(a についての和は取らない)；

$$:J^a(z)^2: \equiv \lim_{w\to z}\left(J^a(w)J^a(z) - \frac{k/2}{(w-z)^2}\right). \tag{3.72}$$

全ての生成子について足し上げると

$$:\sum_{a=1}^{\dim G} J^a(z)^2: = \lim_{w\to z}\left(\sum_{a=1}^{\dim G} J^a(w)J^a(z) - \frac{(k/2)\dim G}{(w-z)^2}\right) \tag{3.73}$$

*7 残念ながらこの有名な研究は著者の一人とは全く関係がない．

を得る．この表式はまた留数積分を用いると

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{w=z} dw \sum_a \frac{J^a(w)J^a(z)}{w-z} \tag{3.74}$$

と表すこともできる．ここで w の積分路は z を囲む．実際 OPE

$$J^a(w)J^a(z) = \frac{k/2}{(w-z)^2} + \text{reg.}$$

を用いると，発散項の寄与は留数積分の結果取り除かれ，正則項の $w=z$ での値のみが残る．

一方カレントの正規積は次のように表すこともできる．カレントをモード展開すると

$$\begin{aligned} J^a(w)J^a(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} J^a_n w^{-n-1} J^a_m z^{-m-1} \\ &= \sum_{n\leq m} J^a_n w^{-n-1} J^a_m z^{-m-1} + \sum_{m<n} J^a_m z^{-m-1} J^a_n w^{-n-1} \\ &\quad + \sum_{n\geq 1} [J^a_n, J^a_{-n}] w^{-n-1} z^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

第 3 項を計算すると

$$\sum_{n\geq 1} [J^a_n, J^a_{-n}] w^{-n-1} z^{n-1} = \frac{k/2}{zw}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{k/2}{(w-z)^2}. \tag{3.76}$$

よってカレントの正規積は

$$: J^a(z)^2 : = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} : J^a_n J^a_m : z^{n+m-2} \tag{3.77}$$

と表すこともできる．ここでカレントのモードについての正規積 $:J^a_n J^a_m:$ は，

$$: J^a_n J^b_m : = \begin{cases} J^a_n J^b_m & (m > n), \\ J^b_m J^a_n & (m < n), \\ \dfrac{1}{2}\left(J^a_m J^b_m + J^b_m J^a_m\right) & (m = n), \end{cases} \tag{3.78}$$

で定義される．共形場の理論では場の演算子のモードは添え字が正のものが消滅演算子，添え字が負のものが生成演算子とみなされる．カレント演算子も同様である．したがってモードについての正規積は，消滅演算子を右へ動かし生成演算子を左へ動かすことによって定義される．

菅原構成法におけるエネルギー・運動量テンソルはカレントの2乗で与えられるわけであるが，問題は量子効果を考慮した上で規格化因子をいかに決定するかという点である．そのための指導原理は，「カレント $J^a(z)$ が共形次元1のプライマリー場としてふるまう」という要請である．つまり，OPE

$$T(z)J^a(w) \sim \frac{J^a(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial J^a(w)}{z-w} \tag{3.79}$$

を要請する．あるいは，モード展開をして公式(1.84)を用いると，交換関係

$$[L_n, J^a_m] = -mJ^a_{n+m}, \tag{3.80}$$

を要請すると考えてもよい．

便宜的に α を規格化因子として，$T(z) \equiv \alpha \sum_a :J^a(z)J^a(z):$ とおいてみよう．α を決定するために，まず $J^a(w)$ と $\sum_b :J^b(z)J^b(z):$ の OPE を計算してみる．正規積の公式(3.74)を用いて，また '$\overbrace{J^a(z)J^b}(w)$' を演算子の縮約を表す記号として OPE の特異項で置き換える規則とすると，少し長いが次の計算を得る(表記の煩雑さを避けるため，くり返し現れる添え字について和の規則を用いる)；

$$J^a(w) : J^b(z)J^b(z) := \frac{1}{2\pi i}\oint_z \frac{dx}{x-z}\, J^a(w)J^b(x)J^b(z)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_z \frac{dx}{x-z}\, \left[\overbrace{J^a(w)J^b}(x)\, J^b(z) + J^b(x)\overbrace{J^a(w)J^b}(z)\right] + \text{reg.}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_z \frac{dx}{x-z}\left(\frac{\frac{k}{2}\delta^{ab}}{(w-x)^2}+\frac{if^{ab}{}_c J^c(x)}{w-x}\right)J^b(z)$$

$$\qquad + \frac{1}{2\pi i}\oint_z \frac{dx}{x-z}\, J^b(x)\left(\frac{\frac{k}{2}\delta^{ab}}{(w-z)^2}+\frac{if^{ab}{}_c J^c(z)}{w-z}\right) + \text{reg.}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_z \frac{dx}{x-z}\left(\frac{\frac{k}{2}J^a(z)}{(w-x)^2}+\frac{\frac{k}{2}J^a(x)}{(w-z)^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_z \frac{dx}{x-z}\,\frac{if^{ab}{}_c}{w-x}\left(\frac{\frac{k}{2}\delta^{cb}}{(x-z)^2}+\frac{if^{cb}{}_d J^d(z)}{x-z}+ : J^c(z)J^b(z) :\right)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_z \frac{dx}{x-z}\frac{if^{ab}{}_c}{w-z}\left(\frac{\frac{k}{2}\delta^{bc}}{(x-z)^2}+\frac{if^{bc}{}_d J^d(z)}{x-z}+:J^b(z)J^c(z):\right)+\text{reg.}$$

$$=\frac{kJ^a(z)}{(w-z)^2}+\frac{-f^{ab}{}_c f^{cb}{}_d}{(w-z)^2}J^d(z)+\frac{if^{ab}{}_c}{w-z}\Big\{:J^c(z)J^b(z):+:J^b(z)J^c(z):\Big\}+\text{reg.}$$

上の計算において，カレントの 2 回目の OPE を取る際に，特異項のみならず非特異項も残さないといけないことに注意．最後に f^{abc} の完全反対称性と単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して成り立つ公式：

$$f^{abc}f_{abd}=2h^\vee_G\delta^c_d, \tag{3.81}$$

を用いることにより，

$$:J^b(z)J^b(z):J^a(w)\sim(k+h^\vee_G)\frac{J^a(z)}{(z-w)^2}\sim(k+h^\vee_G)\left\{\frac{J^a(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial J^a(w)}{z-w}\right\},$$

が得られる（$-f^{ab}{}_c f^{cb}{}_d=\frac{1}{2}f^{bca}f_{bcd}$ に注意）．ここで $h^\vee_G$ は G の**双対コクセター数**(dual Coxeter number)であり，随伴表現の 2 次のカシミア演算子の $\frac{1}{2}$ に等しい．

以上より，$\alpha=\dfrac{1}{k+h^\vee_G}$ と規格化因子を選ぶと，正しい OPE(3.79)が再現されることがわかった．すなわち，菅原構成法によるエネルギー・運動量テンソルの公式は，

$$T(z)=\frac{1}{k+h^\vee_G}\sum_{a=1}^{\dim G}:J^a(z)J^a(z): \tag{3.82}$$

と与えられる[*8]．あるいは，モード展開するとビラソロ演算子は，

$$L_n=\frac{1}{k+h^\vee_G}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{a=1}^{\dim G}:J^a_{n-m}J^a_m: \tag{3.83}$$

---

*8 菅原構成の $T(z)$ の表式(3.82)は基底の規格化に依存し，本書では $\mathfrak{g}$ の基底の規格化を $(T^a,T^b)=\frac{1}{2}\delta^{ab}$ と選んでいる．基底の規格化によらない表式；

$$T(z)=\frac{1}{2(k+h^\vee_G)}\sum_{a=1}^{\dim G}:J^a(z)J_a(z):$$

を用いると便利なことも多い．ここで $J(z)=\sum_a J^a(z)T_a=\sum_a J_a(z)T^a$ で，$(T^a,T_b)=\delta^a_b$ とする．

と書ける.

次にエネルギー・運動量テンソル(3.82)同士の OPE を計算してみよう. 再び(3.74)を用いて, OPE (3.79)と(3.23)を使うことによって次の計算を得る；

$$T(z)T(w) = \frac{1}{k+h_G^\vee}\frac{1}{2\pi i}\oint_w \frac{dx}{x-w}\left\{\overline{T(z)J^a}(x)\,J^a(w)+J^a(x)\overline{T(z)J^a}(w)\right\}$$
$$= \frac{1}{k+h_G^\vee}\frac{1}{2\pi i}\oint_w \frac{dx}{x-w}\left\{\left(\frac{J^a(x)}{(z-x)^2}+\frac{\partial J^a(x)}{z-x}\right)J^a(w)\right.$$
$$\left.+J^a(x)\left(\frac{J^a(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial J^a(w)}{z-w}\right)\right\}+\text{reg.} \quad (3.84)$$

さらに, (3.23)の両辺を微分して得られる

$$\partial J^a(z)J^b(w) \sim \frac{-k\delta^{ab}}{(z-w)^3} - if^{ab}{}_c\frac{J^c(w)}{(z-w)^2},$$
$$J^a(z)\partial J^b(w) \sim \frac{k\delta^{ab}}{(z-w)^3} + if^{ab}{}_c\frac{J^c(w)}{(z-w)^2},$$

を用い, 再び積分 $\displaystyle\oint_w \frac{dx}{x-w}$ の存在のために, 今度は OPE の非特異項も残さないといけないことに注意すると, (3.84)は,

$$T(z)T(w) = \frac{1}{k+h_G^\vee}\frac{1}{2\pi i}\oint_w \frac{dx}{x-w}\left\{\frac{\frac{k}{2}\delta^{aa}}{(z-x)^2(x-w)^2}+\frac{:J^a(w)J^a(w):}{(z-x)^2}\right.$$
$$+\frac{(-k)\delta^{aa}}{(z-x)(x-w)^3}+\frac{:\partial J^a(w)J^a(w):}{z-x}+\frac{\frac{k}{2}\delta^{aa}}{(z-w)^2(x-w)^2}+\frac{:J^a(w)J^a(w):}{(z-w)^2}$$
$$\left.+\frac{k\delta^{aa}}{(z-w)(x-w)^3}+\frac{:J^a(w)\partial J^a(w):}{z-w}\right\}+\text{reg.}$$
$$= \frac{1}{k+h_G^\vee}\left\{\frac{\frac{k}{2}\dim G}{(z-w)^4}+\frac{2:J^a(w)J^a(w):}{(z-w)^2}+\frac{1}{z-w}\partial\left(:J^a(w)J^a(w):\right)\right\}+\text{reg.}$$

と評価される.

以上より, 求める OPE として

表 3.1 単純リー代数：コクセター数の欄の括弧内の数字は双対コクセター数を表す．A_n，D_n，E_n (simply laced)の場合，双対コクセター数=コクセター数である．

タイプ	(双対)コクセター数	次元	指数(exponents)	古典群
A_n	$n+1$	$n(n+2)$	$1, 2, \cdots, n$	$SU(n+1)$
B_n	$2n \quad (2n-1)$	$n(2n+1)$	$1, 3, \cdots, 2n-1$	$SO(2n+1)$
C_n	$2n \quad (n+1)$	$n(2n+1)$	$1, 3, \cdots, 2n-1$	$Sp(n) \ (USp(2n))$
D_n	$2n-2$	$n(2n-1)$	$1, 3, \cdots, 2n-3, n-1$	$SO(2n)$
E_6	12	78	$1, 4, 5, 7, 8, 11$	—
E_7	18	133	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$	—
E_8	30	248	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$	—
F_4	12　(9)	52	$1, 5, 7, 11$	—
G_2	6　(4)	14	$1, 5$	—

$$T(z)T(w) \sim \frac{c(G,k)/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}, \tag{3.85}$$

$$c(G,k) \equiv \frac{k \dim G}{k+h_G^\vee}, \tag{3.86}$$

が得られる．したがって，1.7.1 項の議論に従い，菅原構成法によるエネルギー・運動量テンソルは中心電荷 $c=c(G,k)$ (3.86)を持つビラソロ代数を生成することが結論される．参考までに単純リー代数についてのデータを表 3.1 にまとめておく．

コメント　**simply laced リー代数**　単純リー代数の中で，A_n $(n=1,2,\cdots)$, D_n $(n=4,5,\cdots)$，E_6，E_7，E_8 は多くの共通の性質を持っている．まず，その全ての単純ルートの大きさが等しく，したがってこれら ADE 型のディンキン図形には頂点を結ぶ 1 重線しか現れないため，「1 重のレースで覆った」(simply laced) リー代数と呼ばれている(図 4.1 を参照)．また，これらのリー代数ではコクセター数と双対コクセター数は値が等しい．

ADE 型のリー代数やディンキン図形は数理物理では重要度が高く，本書でも繰り返し登場する．

4 カレント代数の表現論

この章では前章の続きとして，カレント代数の表現論について解説しよう．2章で解説したように共形場理論ではビラソロ代数の表現論が重要な役割を果たすが，同様の理由でカレント代数の対称性を持つ理論ではその表現論を研究することが重要である．カレント代数の共形場理論においては，有限次元リー代数の大域的対称性しか持たない理論とは対照的に，ユニタリ表現(可積分表現)が高々有限個しか存在せず，ビラソロ代数のミニマル模型と類似している．また，ワード・高橋恒等式を通して相関関数に強い拘束条件が課され，表現論の情報から演算子積のフュージョン規則が決定されることを示す．カレント代数の数学的な背景であるアフィン・リー代数(アフィン・カッツ・ムーディー代数)[10] についても解説する．

4.1 $SU(2)$ カレント代数の表現論

まず議論をわかりやすくするために $SU(2)$ の場合を議論しよう．一般にリー群 G のカレント代数を $\widehat{G}$，あるいはレベルを明示する場合は，$\widehat{G}_k$ と表すことが多い．したがって，$SU(2)$ カレント代数は，$\widehat{SU}(2)$ と表される．$SU(2)$ カレント代数は OPE (3.26)，あるいは交換関係；

$$[J_n^a, J_m^b] = i\epsilon^{abc} J_{n+m}^c + \frac{1}{2} n\delta_{ab}\delta_{n+m,0}K, \quad (a, b = 1, 2, 3) \tag{4.1}$$

によって定義される．ここで K はカレント代数の中心の生成元であり，K の固有値がレベル k である．これまでは演算子 K と正の整数 k を区別せずに扱って来たが，表現論を考える際にはこの両者を区別して扱った方が都合がよい．言い換えれば，$SU(2)$ カレント代数(4.1)のカルタン部分代数は J_0^3，L_0，

K によって生成されるとみなす.

4.1.1 可積分表現

ビラソロ代数の場合同様，最高ウェイト表現について考えよう．まず $SU(2)$ リー代数と同様

$$J_n^{\pm} \equiv J_n^1 \pm i J_n^2, \tag{4.2}$$

とおくと，(4.1)より次の交換関係が得られる；

$$\begin{aligned} [J_n^3, J_m^{\pm}] &= \pm J_{n+m}^{\pm}, \\ [J_n^+, J_m^-] &= 2J_{n+m}^3 + n\delta_{n+m,0}K. \end{aligned} \tag{4.3}$$

前章で示したように，菅原構成法によってカレント代数の表現空間には中心電荷 $c(G,k)$ (3.86)のビラソロ代数が自然に作用する．交換関係(3.80)より，

$$[L_0, J_n^a] = -nJ_n^a, \tag{4.4}$$

が得られるので，J_n^a は L_0 の固有値を $-n$ だけ変える演算子として作用する.

状態を指定するために3つの互いに可換な演算子：J_0^3, L_0, K の固有値を与えればよい(中心電荷 $c{=}c(G,k)$ は K の固有値 k から決まる)．既約表現に対しては，シューアの補題により K は状態によらずに一定の固有値を取るので，状態空間は J_0^3 と L_0 の同時固有空間によって直和分解されることとなる.

有限次元リー代数の表現論にならって最高ウェイト表現を考えるのが便利である．「最高ウェイト状態」$|j\rangle$ を，次の等式によって定義する；

$$\begin{cases} J_n^{\pm}|j\rangle = J_n^3|j\rangle = 0 \qquad (n=1,2,3,\cdots), \\ J_0^+|j\rangle = 0, \\ J_0^3|j\rangle = j|j\rangle. \end{cases} \tag{4.5}$$

最高ウェイト状態 $|j\rangle$ に昇降演算子 J_n^- $(n{\le}0)$，J_m^3，J_m^+ $(m{<}0)$を繰り返し作用させることにより，カレント代数 $\{J_n^a\}$ の最高ウェイト表現が得られる.

ゼロ・モード J_0^3, $J_0^{\pm}$ は $SU(2)$ を生成することに注意しよう；

$$[J_0^3, J_0^\pm] = \pm J_0^\pm, \qquad [J_0^+, J_0^-] = 2J_0^3.$$

そして，(4.5)における最後の2つの条件は，$SU(2)$ のスピン j 表現における最高ウェイト条件である．したがって角運動量の理論でよく知られているように，ユニタリ表現であるためには，

$$2j+1 \in \{1, 2, 3, \cdots\}, \quad (J_0^-)^{2j+1}|j\rangle = 0, \tag{4.6}$$

が成立しなければならない．

さらに，$\{I^+ \equiv J_1^-,\ I^- \equiv J_{-1}^+,\ I^3 \equiv \frac{1}{2}K - J_0^3\}$ も $SU(2)$ 部分代数をなすことが確かめられる；

$$[I^3, I^\pm] = \pm I^\pm, \qquad [I^+, I^-] = 2I^3.$$

そして，状態 $|j\rangle$ はこの第2の $SU(2)$ 代数に対しても最高ウェイト状態となっており，スピン $\frac{k}{2} - j$ 表現を与える；

$$I^+|j\rangle = 0, \quad I^3|j\rangle = \left(\frac{k}{2} - j\right)|j\rangle. \tag{4.7}$$

やはりユニタリ表現であることの要請により，

$$2\left(\frac{k}{2} - j\right) + 1 \in \{1, 2, 3, \cdots\}, \quad (I^-)^{k-2j+1}|j\rangle \left(\equiv (J_{-1}^+)^{k-2j+1}|j\rangle\right) = 0, \tag{4.8}$$

が得られる．

条件(4.6)と(4.8)を組み合わせることにより，$|j\rangle$ を最高ウェイト状態とする表現がユニタリであるための必要条件として，レベル k とスピン j に関する条件：

$$k \in \{0, 1, 2, \cdots\} \quad \text{かつ} \quad j \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \cdots, \frac{k}{2}\right\}, \tag{4.9}$$

が得られる．実はこれがユニタリ表現であるための十分条件であることも示される [10]．このようにして得られたユニタリ既約表現を数学の文献([10] など)に従って**可積分表現**(integrable representation)，または**可積分加群**(integrable module)と呼ぶことにする．可積分表現は単純リー代数の有限次元既

約表現のカレント代数への自然な拡張である*1．一般のカレント代数の可積分表現については，4.3 節で解説する．

3.4 節で述べたように，カレント代数の既約表現の空間には，菅原構成法によるビラソロ代数が自然に作用し，中心電荷は(3.86)，すなわち $SU(2)$ に対しては，

$$c=\frac{3k}{k+2}, \tag{4.10}$$

と与えられる．そして交換関係(4.4)及び，正規積による L_n の表式(3.83)により，$|j\rangle$ はビラソロ代数に対しても最高ウェイト状態(すなわちプライマリー状態)になっていることが確かめられる．それでは $|j\rangle$ の共形次元はどうなるだろうか？ 式(3.83)を $SU(2)$ の場合に書くと，

$$L_0=\frac{1}{k+2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{a=1}^{3}:J^a_{-m}J^a_m:$$

となるので，

$$L_0|j\rangle=\frac{1}{k+2}\sum_{a=1}^{3}J^a_0J^a_0|j\rangle=\frac{C_2(j)}{2(k+2)}|j\rangle\equiv\frac{j(j+1)}{k+2}|j\rangle \tag{4.11}$$

が得られる．ここで，$C_2(j)$ は $SU(2)$ の 2 次のカシミア演算子*2であり，スピン j 表現に対し，$C_2(j)=2j(j+1)$ となることを用いた．したがって，最高ウェイト状態 $|j\rangle$ は，共形次元

$$h_j=\frac{j(j+1)}{k+2}, \tag{4.12}$$

を持つことがわかった．$|j\rangle$ に対応するプライマリー場 $\phi_j(z)$ は，次の OPE で特徴付けられることとなる；

$$J^3(z)\phi_j(w)\sim\frac{j}{z-w}\phi_j(w),\qquad J^+(z)\phi_j(w)\sim 0,$$

---

*1 実際，[10] によると，単純リー代数はカッツ・ムーディー代数の最も簡単な場合であり，そのとき可積分表現は有限次元既約表現に帰着する．4.3 節も参照されたい．

*2 2 次のカシミア演算子は，一般の半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ と表現 $\mathcal{R}$ に対し，

$$C_2(\mathcal{R})\equiv\sum_a\mathcal{R}(T^a)\mathcal{R}(T_a),\quad (T^a,T_b)=\delta_{ab},$$

と定義される．角運動量でおなじみの $\boldsymbol{J}^2$ は $\dfrac{1}{2}C_2(j)=j(j+1)$ に等しい．

$$T(z)\phi_j(w) \sim \frac{h_j}{(z-w)^2}\phi_j(w) + \frac{1}{z-w}\partial\phi_j(w). \tag{4.13}$$

コメント **特異ベクトル(ヌル状態)** 状態 $(J_0^-)^{2j+1}|j\rangle$, $(J_{-1}^+)^{k-2j+1}|j\rangle$ をゼロとおくことについてもう少し精密に述べておこう．これらは，カレント代数の交換関係を使うと，j を $-j-1$, $k-j+1$ で置き換えた最高ウェイト条件(4.5)を満たしていることが確かめられる．したがってこれらの状態は 2 章で扱ったビラソロ代数の表現論における特異ベクトルに相当しており，全ての状態と直交している．既約表現を得るにはこれらから生成される状態を全てゼロとおかなければならない．2 章と同様のバーマ加群を用いた議論については，4.3 節を参照されたい．

4.1.2 指標公式

$SU(2)$ カレント代数の指標公式を与えておこう．指標は(2.13)と同様に定義されるが，カルタン部分代数が L_0 に加えて J_0^3 も含むので，その固有値も測るように定義するのが自然である．つまり，スピン $\dfrac{\ell}{2}$，レベル k の可積分表現 $L(\ell,k)$ $(\ell=0,1,\cdots,k)$ に対し，その指標公式は次のように定義される．

$$\chi_{\ell,k}^{SU(2)}(\tau,z) \equiv \mathrm{Tr}_{L(j,k)}\left[q^{L_0-\frac{c_k}{24}}e^{2\pi i z J_0^3}\right] \tag{4.14}$$

ここで $c_k=\dfrac{3k}{k+2}$ は(4.10)に与えた $\widehat{SU}(2)_k$ の中心電荷である．

4.3 節で解説するが，**ワイル・カッツ公式**(Weyl-Kac formula)と呼ばれるカレント代数の指標公式が知られており，それを用いると，

$$\begin{aligned}\chi_{\ell,k}^{SU(2)}(\tau,z) &= \frac{\Theta_{\ell+1,k+2}(\tau,z)-\Theta_{-(\ell+1),k+2}(\tau,z)}{\Theta_{1,2}(\tau,z)-\Theta_{-1,2}(\tau,z)}\\ &\equiv \frac{\Theta_{\ell+1,k+2}(\tau,z)-\Theta_{-(\ell+1),k+2}(\tau,z)}{i\theta_1(\tau,z)}\end{aligned} \tag{4.15}$$

となる．ここで，

$$\Theta_{m,k}(\tau,z) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{k(n+\frac{m}{2k})^2}y^{k(n+\frac{m}{2k})}, \quad (q\equiv e^{2\pi i\tau},\ y\equiv e^{2\pi i z}),$$

はテータ関数(A.6)である．テータ関数のいろいろな性質については，付録を参照されたい．

指標(4.15)で $z=0$ とおいて共形ウェイトについての縮重度のみを数えるの

も有用であることが多い．$z=0$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理と(A.31)を用いると，

$$\chi_{\ell,k}^{SU(2)}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)^3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\{\ell+1+2(k+2)n\}\, q^{\frac{1}{4(k+2)}\{\ell+1+2(k+2)n\}^2}, \qquad (4.16)$$

が得られる．$\eta(\tau)$ はエータ関数(2.36)((A.30))である．q 展開の最低次項は，

$$\chi_{\ell,k}^{SU(2)}(\tau) = (\ell+1)q^{\frac{(\ell+1)^2}{4(k+2)}}+\cdots \equiv (\ell+1)q^{h_\ell-\frac{c_k}{24}}+\cdots,$$
$$h_\ell = \frac{\ell(\ell+2)}{4(k+2)}, \quad c_k = \frac{3k}{k+2},$$

であり，もちろん数係数 $\ell+1$ は $L_0=h_\ell$ のプライマリー状態が $SU(2)$ のスピン $\dfrac{\ell}{2}$ 表現に属していることを意味している．

レベル $k=1,2$ のとき指標公式(4.15)は次のように書き換えることができ有用である；

<u>$k=1$</u>

$$\chi_{\ell,1}^{SU(2)}(\tau,z) = \frac{\Theta_{\ell,1}(\tau,z)}{\eta(\tau)}, \quad (\ell=0,1). \qquad (4.17)$$

<u>$k=2$</u>

$$\chi_{\ell,2}^{SU(2)}(\tau,z) = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\theta_3(\tau,0)}{\eta(\tau)}}\frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)}+(-1)^{\ell/2}\sqrt{\frac{\theta_4(\tau,0)}{\eta(\tau)}}\frac{\theta_4(\tau,z)}{\eta(\tau)}\right\},$$
$$(\ell=0,2)$$
$$\chi_{1,2}^{SU(2)}(\tau,z) = \sqrt{\frac{\theta_2(\tau,0)}{2\eta(\tau)}}\frac{\theta_2(\tau,z)}{\eta(\tau)}. \qquad (4.18)$$

$\theta_i(\tau,z)$ はヤコビ(Jacobi)のテータ関数(A.8)である．これらの公式が実際に(4.15)と等しいことの証明は少し非自明なのでここでは割愛するが，物理的な意味は以下の通りである；

まず $k=1$ のときは $c=1$ となり，半径 $\sqrt{\alpha'}$ (自己双対半径)の円周上にコンパクト化した実スカラー場 $X(z,\bar{z})$ の共形場理論と等価である．実際，円周の半径によらずに存在するカレント

$$J^3(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha'}}i\partial X(z), \qquad (4.19)$$

に加え，$R=\sqrt{\alpha'}$ では，スピン 1 の頂点作用素

$$J^{\pm}(z)\ \left(\equiv J^1(z)\pm iJ^2(z)\right)\ \equiv e^{\pm i\frac{2}{\sqrt{\alpha'}}X(z)}, \tag{4.20}$$

を構成することができ，カレント $\{J^3(z),\, J^+(z),\, J^-(z)\}$ はレベル 1 の $SU(2)$ カレント代数を生成することが確かめられる．すなわち，OPE

$$\begin{cases} J^3(z)J^3(w) \sim \dfrac{1/2}{(z-w)^2}, \\ J^3(z)J^{\pm}(w) \sim \dfrac{\pm 1}{z-w}J^{\pm}(w), \\ J^+(z)J^-(w) \sim \dfrac{1}{(z-w)^2}+\dfrac{2}{z-w}J^3(w) \end{cases} \tag{4.21}$$

を満足する．

また $k=2$ のときは $c=\dfrac{3}{2}$ となり，これは 3 成分のマヨラナ・フェルミオンの系と等価である．すなわち，$\psi^a(z)$ $(a=1,2,3)$ を 3 成分のカイラルなマヨラナ・フェルミオンとすると，レベル 2 の $SU(2)$ カレント代数が

$$J^a(z) = -\frac{i}{2}\epsilon^{abc}\psi^b(z)\psi^c(z), \tag{4.22}$$

と構成できる*3．

よい計算練習となるので，読者は，上のように自由場で定義されたカレント $J^a(z)$ が確かに $SU(2)$ のカレント代数を生成することをぜひ確認してみて欲しい．

4.2 相関関数への応用

本節ではカレント代数の重要な応用として，相関関数のワード・高橋恒等式を考察する．再び正則部分のみに着目し，簡単のために $SU(2)$ で考えるが，エッセンスは一般のカレント代数でも同じである．

以下，$\Phi_i(z_i)\equiv(\phi^{(i)}(z_i)_\alpha)_{\alpha=1,\cdots,\dim\mathcal{R}_i}$ を表現 $\mathcal{R}_i$ に属するプライマリー場であるとし，$SU(2)$ のリー代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(2)$ の元 u に対し，$\mathcal{R}_i(u)\cdot\Phi_i(z_i)$ を

---

*3 一般に，N 成分のマヨラナ・フェルミオンはレベル 1 の $SO(N)$ カレント代数を生成する．したがって，$\widehat{SU}(2)_2\cong\widehat{SO}(3)_1$ である．

$$(\mathcal{R}_i(u)\cdot\Phi_i(z_i))_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\dim \mathcal{R}_i} \mathcal{R}_i(u)^\beta{}_\alpha \phi^{(i)}(z_i)_\beta \tag{4.23}$$

の意味であるとする．このとき OPE (3.27)は，

$$J^a(z)\Phi_i(z_i) \sim \frac{\mathcal{R}(T^a)\cdot\Phi_i(z_i)}{z-z_i}, \tag{4.24}$$

と書かれる．

まず次のワード・高橋恒等式から出発する；

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_z dx \left\langle \mathrm{Tr}(u(x)J(x))X(z)\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle \\ = -\sum_{i=1}^{N}\left\langle X(z)\Phi_1(z_1)\cdots(\mathcal{R}_i(u(z_i))\cdot\Phi_i(z_i))\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle.\end{aligned} \tag{4.25}$$

ここで $u(x)$ は $\mathfrak{g}$ に値を取る $x\neq z$ で正則な任意の関数，$X(z)$ は**プライマリー場とは限らない**局所場とする．x-積分は z を囲む微小な積分路 C に関して取る．(4.25)を導くには，積分路 C を，各 z_i を囲むように，$C \longrightarrow -\sum_{i=1}^{N} C_i$ と変形し(図 2.1 参照)，OPE (4.24)を各プライマリー場 $\Phi_i(z_i)$ に適用すればよい．あるいは WZW 模型の経路積分で相関関数を定義する場合は，3.3.2 項でやったように積分変数 $g(z,\bar{z})$ の変数変換を利用してもよい．

(1) $SL(2,\mathbb{C})$ 不変性

まず大域的な共形不変性より，表 1.3 で与えられた微分方程式が従う；

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{ h_i(n+1)z_i^n + z_i^{n+1}\frac{\partial}{\partial z_i}\right\}\left\langle \Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle = 0. \qquad (n=-1,0,1) \tag{4.26}$$

ここで h_j はプライマリー場 $\Phi_i(z_i)$ の共形ウェイトである．

(2) 大域的 G 不変性

ワード・高橋恒等式(4.25)において，$X(z)=\mathbf{1}$，$u(x)=T^a$ とおいてみよう．このとき線積分 $\oint_x dx J^a(x)\cdot\mathbf{1}$ は消えるので，大域的な $G\,(=SU(2))$ 不変性を表す恒等式として，

$$\sum_{i=1}^{N} \mathcal{R}_i(T^a)\Big\langle \Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\Big\rangle = 0 \tag{4.27}$$

が得られる．ここで $\mathcal{R}_i(T^a)$ は(4.23)によって $\Phi_i(z_i)$ に作用すると約束する．特に $T^a=T^3$ と選び，$\Phi_i(z_i)\equiv(\phi_{j_i,m_i}(z_i))_{-j_i\le m_i\le j_i}$ をスピン j_i 表現に属するプライマリー場とすると，選択則

$$\Big\langle \phi_{j_1,m_1}(z_1)\cdots\phi_{j_N,m_N}(z_N)\Big\rangle \neq 0, \quad \text{ならば，} \sum_{i=1}^{N} m_i = 0, \tag{4.28}$$

が得られる．これはもちろん物理的には(アイソ)スピンの保存則を意味している．

(3) KZ 方程式

次にワード・高橋恒等式(4.25)において，$u(x)=\dfrac{T^a}{x-z}$ とおいてみると次式が得られる；

$$\Big\langle (J^a_{-1}X(z))\,\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\Big\rangle = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathcal{R}_i(T^a)}{z_i-z}\Big\langle X(z)\Phi_1(z_i)\cdots\Phi_N(z_N)\Big\rangle. \tag{4.29}$$

再び $\mathcal{R}_i(T^a)$ は $\Phi_i(z_i)$ に作用する．

さて(3.83)より，表現 $\mathcal{R}$ に属するプライマリー場 $\Phi(z)$ に対し，

$$L_{-1}\Phi(z) = \frac{1}{k+2}\sum_{n\in Z} J^a_{-n}J^a_{n-1}\Phi(z) = \frac{2}{k+2}J^a_{-1}\mathcal{R}(T^a)\cdot\Phi(z),$$

であり，$L_{-1}\Phi(z)=\partial_z\Phi(z)$ が成り立つので，

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big\langle \Phi(z)\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\Big\rangle = \frac{2}{k+2}\Big\langle\, (J^a_{-1}\mathcal{R}(T^a)\cdot\Phi(z))\ \Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\Big\rangle$$

となる．そして，$X(z)=\mathcal{R}(T^a)\cdot\Phi(z)$ としてワード・高橋恒等式(4.29)を適用することにより，偏微分方程式

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{2}{k+2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathcal{R}_i(T^a)\otimes\mathcal{R}(T^a)}{z_i-z}\right]\Big\langle \Phi(z)\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\Big\rangle, \tag{4.30}$$

を得る．ここで，$\mathcal{R}(T^a)$，$\mathcal{R}_i(T^a)$ はそれぞれ，プライマリー場 $\Phi(z)$，$\Phi_i(z_i)$ に作用すると約束する．これを**クニズニク・ザモロジコフ**(Knizhnik-Zamolodchikov)**方程式** [38] と呼び，しばしば **KZ 方程式**と略称される．どの

プライマリー場の挿入点の微分に関しても同様の方程式が書き下せるので，KZ 方程式は WZW 模型の相関関数の満たす基礎方程式系を与える．残念ながら KZ 方程式は一般に複雑な連立偏微分方程式となるので，多点関数に対し解くのは困難であるが，4 点関数については確定特異点型の常微分方程式に帰着し，強力な解析手段を与える．

(4) 非可積分なスピンの decoupling

最後に前節 4.1 の直接的な応用を論じよう．$\Phi(z)$ $(\equiv(\phi_{j,m}(z)))$ をスピン j 表現$(0\le j\le \frac{k}{2})$に属するプライマリー場とする．要請(4.8)よりプライマリー場 $\Phi(z)$ に対して，$(J^{+}_{-1})^{k-2j+1}\Phi(z)=0$ となるので，

$$\left\langle (J^{+}_{-1})^{k-2j+1}\Phi(z)\,\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle = 0, \tag{4.31}$$

が成立する．$X_n(z)=(J^{+}_{-1})^{n}\Phi(z)$ とすると，

$$J^{+}_{-1}X_{n-1}(z)=X_n(z),\ (n=1,\cdots,k-2j+1),\ X_0(z)=\Phi(z),\ X_{k-2j+1}(z)=0,$$

であるから，$X_n(z)$ を $X(z)$ とみなして(4.29)を逐次的に適用すると，組み合わせ論的な因子を考慮して次の恒等式が得られる；

$$\sum_{\substack{n_1,\cdots,n_N\in\mathbf{Z}_{\ge 0}\\ \sum_{i=1}^{N} n_i=k-2j+1}} \frac{(k-2j+1)!}{n_1!\cdots n_N!}\ \frac{\mathcal{R}_1(T^+)^{n_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{R}_N(T^+)^{n_N}}{(z-z_1)^{n_1}\cdots(z-z_N)^{n_N}} \times\left\langle \Phi(z)\Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle = 0. \tag{4.32}$$

恒等式(4.32)において，まず $j=0$ すなわち $\Phi(z)=\mathbf{1}$ とおいてみよう．相関関数の z-依存性はなくなるので，たとえば $(z-z_1)^k$ を掛けて z_1 のみを囲む積分路で z-積分を実行すれば，

$$\mathcal{R}_1(T^+)^k\cdot\left\langle \Phi_1(z_1)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle = 0, \tag{4.33}$$

が得られる．この恒等式より $\Phi_1(z_1)$ が「非可積分なスピン」$j_1>\frac{k}{2}$ を持つとすると，相関関数はゼロとなることがわかる．実際，最高ウェイト成分 $\phi_{j_1,j_1}(z_1)$ は，$\phi_{j_1,j_1}(z_1)\propto\mathcal{R}_1(T^+)^k\phi_{j_1,j_1-k}(z_1)$ と書けるので，(4.33)より，

$$\left\langle \phi_{j_1,j_1}(z_1)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle = 0,$$

が従う．さらに恒等式(4.27)を組み合わせると，任意の成分 $\phi_{j_1,m_1}(z_1)$ $(-j_1 \le {}^\forall m_1 \le j_1)$ に対しても，

$$\left\langle \phi_{j_1,m_1}(z_1)\Phi_2(z_2)\cdots\Phi_N(z_N)\right\rangle = 0,$$

となることがわかる [39]．このように，非可積分なスピン $j>\frac{k}{2}$ が実際に理論から decouple していることが証明される．既に述べたようにカレント代数のユニタリ表現は可積分表現に限られるので，この事実は WZW 模型のユニタリ性を保証している．

次に 3 点関数に恒等式(4.32)を適用してみよう．3 点関数は共形不変性の要請より(1.75)の関数形を持っているので，容易に確かめられるように恒等式(4.32)の各項は別々にゼロにならなければならない．便宜上，記号を変えて $\Phi(z)\to\phi_{j_1,m_1}(z_1)$, $\Phi_1(z_1)\to\phi_{j_2,m_2}(z_2)$, $\Phi_2(z_2)\to\phi_{j_3,m_3}(z_3)$ とすると，

$$\mathcal{R}_2(T^+)^{n_2}\mathcal{R}_3(T^+)^{n_3}\left\langle \phi_{j_1,m_1}(z_1)\phi_{j_2,m_2}(z_2)\phi_{j_3,m_3}(z_3)\right\rangle = 0,$$
$$\text{ただし } n_2+n_3 \ge k-2j_1+1, \tag{4.34}$$

が成立する．それでは，3 点関数 $\left\langle \phi_{j_1,m_1}(z_1)\phi_{j_2,m_2}(z_2)\phi_{j_3,m_3}(z_3)\right\rangle$ がゼロにならないのはどのような場合であろうか？ まず既に与えた $SU(2)$ 不変性の要請(4.27)から，スピン j_1，j_2，j_3 の合成が 1 重項を含まなければならない．よってクレブシュ・ゴルダン規則より，

$$|j_1-j_2| \le j_3 \le j_1+j_2, \quad j_1+j_2+j_3 \in \mathbb{Z}, \tag{4.35}$$

が得られ，さらに

$$m_1+m_2+m_3 = 0, \tag{4.36}$$

が成立しなければならない．次に(4.34)を使うと，

$$(m_2+j_2)+(m_3+j_3) \le k-2j_1$$

が満たされないといけないことがわかる．もしそうでなければ，$\phi_{j_i,m_i}(z_i)\propto$

$\mathcal{R}_i(T^+)^{m_i+j_i}\phi_{j_i,-j_i}(z_i)$ $(i=2,3)$ と書けるので，(4.34)より相関関数はゼロとなるからである．したがって，

$$\begin{aligned} j_3 &\le k-2j_1-m_2-j_2-m_3 \\ &= k-2j_1+m_1-j_2 \\ &\le k-j_1-j_2, \end{aligned}$$

が結論される．ここで2行目では(4.36)を用いた．以上の結果をまとめると，次の選択規則が得られる [39]；

$$\left\langle \phi_{j_1,m_1}(z_1)\phi_{j_2,m_2}(z_2)\phi_{j_3,m_3}(z_3) \right\rangle \neq 0, \text{ ならば, }$$
$$\begin{cases} m_1+m_2+m_3=0, \\ |j_1-j_2| \le j_3 \le \min\{j_1+j_2,\ k-j_1-j_2\}, \\ j_1+j_2+j_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{4.37}$$

共形場理論において3点関数はOPEの構造定数を与えていたことを思い出そう．したがって，(4.37)は演算子積のフュージョン規則；

$$[\phi_{j_1,m_1}]\times[\phi_{j_2,m_2}] = \sum_{j=|j_1-j_2|,\, j+j_1+j_2\in\mathbb{Z}}^{\min\{j_1+j_2,\, k-j_1-j_2\}} \delta_{m,m_1+m_2}\,[\phi_{j,m}] \tag{4.38}$$

と解釈される．フュージョン規則(4.38)は6.3節において，別の角度から再び考察する．

4.3 アフィン・リー代数

本節では，数学的な背景に興味のある読者のために，カレント代数と関係の深いアフィン・リー代数(アフィン・カッツ・ムーディー代数 [10])の基本構造とその表現論についてまとめておく．単純リー代数の基本的な知識を前提とするので，リー代数が苦手な読者は細部を読み飛ばして，必要な公式のみを参照するという読み方で差し支えない．

4.3.1 ループ代数とアフィン・リー代数

$\mathfrak{g}$ をランク r の単純リー代数とし，(,) のカルタン・キリング計量とする．$\mathfrak{g}$ の**ループ代数**を $\mathfrak{g}$ に値を取る形式的ローラン多項式の空間と定義する；

$$L\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t, t^{-1}]. \tag{4.39}$$

$L\mathfrak{g}$ は次のリー括弧によって自然に無限次元のリー代数となる；

$$[t^m\otimes u,\, t^n\otimes v] = t^{m+n}\otimes[u, v], \quad ({}^\forall u, v \in \mathfrak{g},\ {}^\forall m, n \in \mathbb{Z}). \tag{4.40}$$

さらに中心拡大 $\widetilde{L\mathfrak{g}}$ を，

$$\widetilde{L\mathfrak{g}} \equiv L\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}K, \tag{4.41}$$

$$[t^m\otimes u,\, t^n\otimes v] = t^{m+n}\otimes[u, v]+m\delta_{m+n,0}K,$$
$$({}^\forall u, v \in \mathfrak{g},\ {}^\forall m, n \in \mathbb{Z}), \tag{4.42}$$

$$[K,\, t^m\otimes u] = 0, \quad ({}^\forall u \in \mathfrak{g},\ {}^\forall n \in \mathbb{Z}). \tag{4.43}$$

ここで，K は中心の生成元である．$\widetilde{L\mathfrak{g}}$ とカレント代数との対応は明らかであろう．実際，$J_n^a \leftrightarrow t^n\otimes T^a$ と対応させ，K を c 数 k で置き換えればカレント代数(3.22)を再現することがわかる．さらに**スケーリング演算子** d を，$t^n\otimes u$ に対し，

$$d = -t\frac{d}{dt} \tag{4.44}$$

と作用するものと定義しよう（$[d, K]$=0 と約束する）．カレント代数においては，d は(定数項を除き)ビラソロ演算子 $-L_0$ と同一視することができる．さて，

$$\widehat{\mathfrak{g}} \equiv \widetilde{L\mathfrak{g}}\oplus\mathbb{C}d, \tag{4.45}$$

とおくと，$\widehat{\mathfrak{g}}$ は自然にリー代数となり，文献 [10] に従いアフィン・カッツ・ムーディー代数または簡単にアフィン・リー代数と呼ぶことにする．こうしてカレント代数の表現論は，アフィン・リー代数の表現論という数学的な問題に帰着するのである．

4.3.2　アフィン・リー代数におけるルート系と基本ウェイト

アフィン・リー代数におけるルート系と表現論において重要な基本ウェイトについて解説する．

(1)　準備　単純リー代数

記号を準備するために，以下少しの間，単純リー代数に対する基礎的な事柄を述べる．$\mathfrak{g}$ のルート系を $\Delta=\Delta_+\cup\Delta_-$ とし，単純ルートを $\alpha_i\,(i=1,\cdots,r)$ としよう．$\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数を $\mathfrak{h}$ として，ルート分解を，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha \equiv \mathfrak{h}\oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} (\mathfrak{g}_\alpha\oplus\mathfrak{g}_{-\alpha}), \tag{4.46}$$

とする．最高ルート(随伴表現の最高ウェイト)を θ として，カルタン・キリング計量の規格化を，

$$(\theta,\theta) = 2 \tag{4.47}$$

によって定める．後の便宜上，正の整数 a_i, $a_i^\vee$ $(i=1,\cdots,r)$ を，

$$\theta = \sum_{i=1}^{r} a_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} a_i^\vee\alpha_i^\vee, \tag{4.48}$$

によって定義しておこう．ここで $^\forall\alpha\in\Delta$ に対し，余ルート $\alpha^\vee$ を，

$$\alpha^\vee \equiv \frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha \tag{4.49}$$

と定義する．$\mathfrak{g}$ が simply laced であるときは，全てのルートが $(\alpha,\alpha)=2$ となることがわかるので，α と $\alpha^\vee$ は区別がなく，以下の多くの式が簡単化されることを指摘しておく．内積 (,) によって定まる $\mathfrak{h}^*$ と $\mathfrak{h}$ の同型写像：$h[\ ]$: $\mathfrak{h}^* \overset{\cong}{\to} \mathfrak{h}$ を，

$$\langle\lambda, h[\alpha]\rangle = (\lambda,\alpha), \quad ({}^\forall\alpha,\lambda \in \mathfrak{h}^*) \tag{4.50}$$

によって定義する．記号を簡単にするために，以下 $h_i{\equiv}h[\alpha_i^\vee]\,(i=1,\cdots,r)$ と表すことにする．単純リー代数においては任意のルート α に対し，$\dim\mathfrak{g}_\alpha(\equiv \mathrm{mult}\,\alpha)=1$ であり，次の性質を持つカルタン・ワイル基底 $E_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ を選ぶことができる($^\forall\alpha\in\Delta$)；

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = h[\alpha^\vee], \quad [h, E_\alpha] = \alpha(h)E_\alpha, \quad [h, E_{-\alpha}] = -\alpha(h)E_{-\alpha}, \quad ({}^\forall h \in \mathfrak{h}).$$

整ウェイト，及び非負整ウェイトの集合を，

$$P \equiv \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, h_i \rangle \in \mathbb{Z}, \ {}^\forall i = 1, \cdots, r\}, \tag{4.51}$$

$$P_+ \equiv \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, h_i \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ {}^\forall i = 1, \cdots, r\}, \tag{4.52}$$

と定義する．基本ウェイト $\Lambda_i (i{=}1, \cdots, r)$ を，

$$\langle \Lambda_i, h_j \rangle \left(\equiv (\Lambda_i, \alpha_j^\vee)\right) = \delta_{ij}, \quad ({}^\forall i, j = 1, \cdots, r), \tag{4.53}$$

と定義すると，

$$P = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\Lambda_i, \quad P_+ = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_i,$$

であることに注意しよう．よく知られているように，$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現は $\Lambda{\in}P_+$ に対する最高ウェイト表現として与えられる．さらに**ワイル・ベクトル** ρ を，

$$\rho \equiv \sum_{i=1}^{r} \Lambda_i \left(\equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha \right), \tag{4.54}$$

で定義する．ρ の基本的な性質として，$\langle \rho, h_i \rangle{=}1$, $({}^\forall i)$ が成り立つ．$\mathfrak{g}$ の表現 $\mathcal{R}$ の 2 次のカシミア演算子は，

$$C_2(\mathcal{R}) \equiv \sum_a \mathcal{R}(T^a)\mathcal{R}(T_a), \quad (T^a, T_b) = \delta_{ab}, \tag{4.55}$$

によって定義され，$\Lambda{\in}P_+$ に対する最高ウェイト表現に対しては，公式：

$$C_2(\Lambda) = (\Lambda, \Lambda{+}2\rho), \tag{4.56}$$

が知られている．

単純ルート $\alpha_i (i{=}1, \cdots, r)$ に対し，そのワイル鏡像変換 r_i を，

$$r_i(\lambda) \equiv \lambda{-}(\lambda, \alpha_i^\vee)\alpha_i \equiv \lambda{-}\langle \lambda, h_i \rangle \alpha_i, \quad ({}^\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*) \tag{4.57}$$

と定義する．$\{r_i\}_{i=1,\cdots,r}$ で生成される離散群をワイル群と呼び，W と表すこ

とにする．単純リー代数に対してはワイル群は有限位数であり，任意のルート $\alpha \in \Delta$ に対するワイル鏡像変換

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^\vee)\alpha, \tag{4.58}$$

もまた W の元であることを注意しておく．定義により，任意のワイル群の元 w は r_i $(i=1,\cdots,r)$ の積で表されるが，

$$w = r_{i_1} \cdots r_{i_\ell},$$

と書ける ℓ の最小値を，「w の長さ」と呼び，$\ell(w)$ と表すことにする．$W(\Delta) = \Delta$，$W(P)=P$ が成り立ち，さらに任意のウェイト $\lambda \in P$ のワイル群の軌道 $W \cdot \lambda$ の中には必ず唯一の P_+ の元が存在する．ワイル群 W の作用は，

$$w(E_\alpha) = E_{w(\alpha)}, \quad ({}^\forall \alpha \in \Delta), \quad \langle w(\lambda), w(h) \rangle = \langle \lambda, h \rangle, \quad ({}^\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*, \ {}^\forall h \in \mathfrak{h}), \tag{4.59}$$

と定義することによって自然に $\mathfrak{g}$ 上の自己同型に拡張される．さらに(4.59)は，単純ルートのワイル鏡像変換 r_i に対して，

$$r_i = \exp(\mathrm{ad}(E_{\alpha_i})) \exp(\mathrm{ad}(E_{-\alpha_i})) \exp(\mathrm{ad}(E_{\alpha_i})) \tag{4.60}$$

によって実現されることがわかる．このように，$\mathfrak{g}$ の元で表される自己同型を**内部自己同型**(inner automorphism)と呼び，$\mathfrak{g}$ の元では表すことができない自己同型を**外部自己同型**(outer automorphism)と呼ぶ．外部自己同型はディンキン図形の対称性と深い関係にあることが知られている．

(2)　アフィン・ルート系とルート分解

それでは本題であるアフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ のルート系を見てみよう．まず $\widehat{\mathfrak{g}}$ のカルタン部分代数 $\widehat{\mathfrak{h}}$ は，

$$\widehat{\mathfrak{h}} \equiv \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d, \tag{4.61}$$

と定義される．ここで K, δ の双対元として $\widehat{\Lambda}_0$，$\delta \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ を，

$$\langle\widehat{\Lambda}_0, K\rangle = \langle\delta, d\rangle = 1, \quad \langle\widehat{\Lambda}_0, \delta\rangle = \langle\delta, K\rangle = 0,$$
$$\langle\widehat{\Lambda}_0, h_i\rangle = \langle\delta, h_i\rangle = 0, \quad ({}^\forall i = 1, \cdots, r), \tag{4.62}$$

で定義する．$\mathfrak{h}$ のカルタン・キリング内積 (,) を次のように $\widehat{\mathfrak{h}}$ に拡張する；

$$(h, K) = (h, d) = (K, K) = (d, d) = 0, \quad ({}^\forall h \in \mathfrak{h}), \quad (K, d) = 1,$$
$$(\lambda, \widehat{\Lambda}_0) = (\lambda, \delta) = (\widehat{\Lambda}_0, \widehat{\Lambda}_0) = (\delta, \delta) = 0, \quad ({}^\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*), \quad (\widehat{\Lambda}_0, \delta) = 1. \tag{4.63}$$

単純リー代数の場合と異なり，符号 $(r+1, 1)$ を持つローレンツ計量であることに注意しよう．

単純リー代数と全く同様に $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ の元 $\widehat{\alpha}$ に対し，

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\widehat{\alpha}} \equiv \{X \in \widehat{\mathfrak{g}} \mid [h, X] = \langle\widehat{\alpha}, h\rangle X, \ {}^\forall h \in \widehat{\mathfrak{h}}\} \tag{4.64}$$

と定義し，$\widehat{\mathfrak{g}}_{\widehat{\alpha}} \neq \{0\}$ であるような $\widehat{\alpha} \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ をアフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ のルート(アフィン・ルート)と呼ぶ．既に与えたアフィン・リー代数の交換関係から容易にわかるように，$\widehat{\mathfrak{g}}$ のルートは，

$$\widehat{\alpha} = \alpha + n\delta, \quad \alpha \in \Delta, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{4.65}$$

と書けるものか，

$$\widehat{\alpha} = n\delta, \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\}, \tag{4.66}$$

に限られる．(4.65)を**実ルート**，(4.66)を**虚ルート**と呼ぶ．もう少し精密に述べると，$\widehat{\mathfrak{g}}$ のルート系(**アフィン・ルート系**) $\widehat{\Delta}$ は，

$$\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}^{\mathrm{re}} \cup \widehat{\Delta}^{\mathrm{im}} \equiv \widehat{\Delta}^{\mathrm{re}}_+ \cup \widehat{\Delta}^{\mathrm{re}}_- \cup \widehat{\Delta}^{\mathrm{im}}_+ \cup \widehat{\Delta}^{\mathrm{im}}_-, \tag{4.67}$$

という構造を持ち，正の実ルート，虚ルートの集合はそれぞれ

$$\widehat{\Delta}^{\mathrm{re}}_+ \equiv \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \Delta_+, \tag{4.68}$$
$$\widehat{\Delta}^{\mathrm{im}}_+ \equiv \{n\delta \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}, \tag{4.69}$$

と定義される．また，$\widehat{\Delta}^{\mathrm{re}}_- \equiv -\widehat{\Delta}^{\mathrm{re}}_+$，$\widehat{\Delta}^{\mathrm{im}}_- \equiv -\widehat{\Delta}^{\mathrm{im}}_+$ とおき，正のアフィン・ルー

ト及び負のアフィン・ルートの集合は,

$$\widehat{\Delta}_{+} \equiv \widehat{\Delta}_{+}^{\rm re} \cup \widehat{\Delta}_{+}^{\rm im}, \quad \widehat{\Delta}_{-} \equiv \widehat{\Delta}_{-}^{\rm re} \cup \widehat{\Delta}_{-}^{\rm im}, \tag{4.70}$$

である.

$\widehat{\mathfrak{g}}$ のルート分解は, (4.46)と同様に,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}} &= \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}} \mathfrak{g}_\alpha \\ &\equiv \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}_{+}^{\rm re}} (\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{-\alpha}) \bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}_{+}^{\rm im}} (\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{-\alpha}), \end{aligned} \tag{4.71}$$

と書かれ, それぞれのルート空間は, 次のようにまとめられる;

- 実ルート : $\widehat{\alpha}=\alpha+n\delta$ のとき, $\widehat{\mathfrak{g}}_{\widehat{\alpha}}=\langle t^n \otimes E_\alpha \rangle$. すなわち, mult $\widehat{\alpha}$ ($\equiv$dim $\widehat{\mathfrak{g}}_{\widehat{\alpha}}$) $=1$ である.
- 虚ルート : $\widehat{\alpha}=n\delta$ のとき, $\widehat{\mathfrak{g}}_{\widehat{\alpha}}=\langle t^n \otimes h_i \rangle_{i=1,\cdots,r}$. すなわち, mult $\widehat{\alpha}=r$ である.

単純リー代数の場合とは異なり, ルートの重複度は必ずしも 1 ではないことに注意しよう.

単純ルートとしては, まず $\mathfrak{g}$ の単純ルート $\alpha_i\,(i=1,\cdots,r)$ はそのまま $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純ルートとなり, さらにもうひとつの単純ルートを,

$$\alpha_0 \equiv \delta - \theta, \tag{4.72}$$

と定義する. 一般に $\mathfrak{g}$ のディンキン図形に新しいノードとして $-\theta$ を付け加えて, ディンキン図形と同じ規則に従ってノード間を線分でつないだものを**拡大ディンキン図形**と呼ぶ. 拡大ディンキン図形はアフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ のディンキン図形とみなされる(図 4.1 参照).

$\widehat{\mathfrak{g}}$ に対しても余ルートは, 上で定義した内積 (,) を用いて(4.49)のように定義され, $(\theta,\theta)=2$ と仮定しているので,

$$\alpha_0^\vee \equiv \frac{2}{(\alpha_0,\alpha_0)}\alpha_0 = \frac{2}{(\theta,\theta)}\alpha_0 = \alpha_0$$

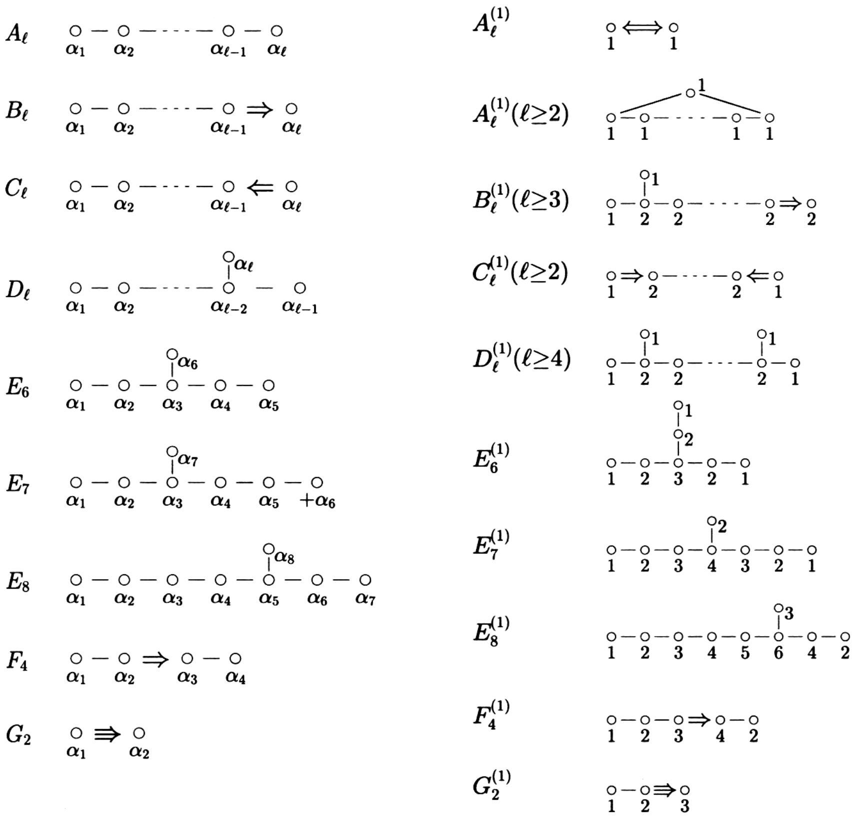


図 4.1 単純リー代数のディンキン図形(左)と拡大ディンキン図形(右)：拡大ディンキン図形の単純ルートの下の数字は(4.75)の a_i を表す.

である. 同型 $h[\;]:\widehat{\mathfrak{h}}^* \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathfrak{h}}$ も $\mathfrak{g}$ の場合と同様に内積 (,) を用いて

$$\langle\lambda, h[\alpha]\rangle = (\lambda, \alpha), \quad ({}^\forall\alpha, \lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*) \tag{4.73}$$

と定義する. $\mathfrak{h}\subset\widehat{\mathfrak{h}}$ の基底 $h_i\equiv h[\alpha_i^\vee]$ $(i=1,\cdots,r)$ はこれまで通りとし, さらに α_0 の双対 h_0 を,

$$h_0 \equiv h[\alpha_0] = K - h[\theta], \tag{4.74}$$

と定義する((4.63)より $h[\delta]=K$ であることに注意). $\widehat{\mathfrak{h}}$ の $r+2$ 個の基底とし

て，h_i $(i=0,\cdots,r)$，d が取れることとなる．形式的に $a_0=a_0^\vee=1$ とおくと，(4.48)より，

$$\delta=\sum_{i=0}^{r}a_i\alpha_i=\sum_{i=0}^{r}a_i^\vee\alpha_i^\vee \tag{4.75}$$

が成り立つ*4．この関係式より任意の正ルート $\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}_+\equiv\Delta_+^{\mathrm{re}}\cup\Delta_+^{\mathrm{im}}$ は，単純リー代数の場合同様

$$\widehat{\alpha}=\sum_{i=0}^{r}n_i\alpha_i,\quad n_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

と表されることがわかる．

(3) アフィン・ウェイト

$\widehat{\mathfrak{g}}$ の整ウェイト，非負整ウェイトは $\mathfrak{g}$ の場合と全く同様に定義される；

$$\widehat{P}\equiv\{\lambda\in\widehat{\mathfrak{h}}^*\mid\langle\lambda,h_i\rangle\in\mathbb{Z},\ {}^\forall i=0,\cdots,r\}, \tag{4.76}$$

$$\widehat{P}_+\equiv\{\lambda\in\widehat{\mathfrak{h}}^*\mid\langle\lambda,h_i\rangle\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ {}^\forall i=0,\cdots,r\}. \tag{4.77}$$

基本ウェイトは，やはり

$$\langle\widehat{\Lambda}_i,h_j\rangle=\delta_{ij},\quad(i,j=0,1,\cdots,r), \tag{4.78}$$

の関係式で定義される．方程式(4.78)の解は $\mathbb{C}\delta$ の元を付け加える不定性があるが，以下簡単のために $\widehat{\Lambda}_i$ は，$\mathbb{C}\delta$ 成分を持たないと仮定する．ウェイトの $\mathbb{C}\delta$ の不定性については，後に論ずることにしよう．このとき $\widehat{\Lambda}_0$ は既に導入した K の双対元であり，$\widehat{\Lambda}_i\,(i=1,\cdots,r)$ は，$\mathfrak{g}$ の基本ウェイト Λ_i と

$$\widehat{\Lambda}_i=\Lambda_i+a_i^\vee\widehat{\Lambda}_0,\quad(i=1,\cdots,r), \tag{4.79}$$

の関係があることがわかる．単純ルートの場合とは異なり，$\mathfrak{g}$ の基本ウェイト

*4 もともとのカッツ・ムーディー・リー代数の一般論では，「(一般化された)カルタン行列が退化しており，ゼロ固有値をひとつ持つ」というのがアフィン・リー代数の定義であり，虚ルート δ はゼロ固有値に属する固有ベクトルに対応している．(4.75)はその事実を示している．また，正確に述べると，$a_0^\vee=1$ は常に成立するが，いわゆる「twisted algebra」と呼ばれるクラスのアフィン・リー代数では $a_0\neq 1$ となるものも存在する．ここでは割愛し，常に $a_0=1$ であるとする．詳しくは [10] 参照．

Λ_i は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の基本ウェイトではないことに注意しよう．明らかに，

$$\widehat{P} = \sum_{i=0}^{r} \mathbb{Z}\widehat{\Lambda}_i + \mathbb{C}\delta, \quad \widehat{P}_+ = \sum_{i=0}^{r} \mathbb{Z}_{\geq 0}\widehat{\Lambda}_i + \mathbb{C}\delta, \tag{4.80}$$

が成立する．ここで，$\widehat{\Lambda} = \sum_{i=0}^{r} m_i \widehat{\Lambda}_i \in \widehat{P}_+ \,(\mathrm{mod}\, \mathbb{C}\delta)$ とすると，(4.79)，(4.48) の関係より，

$$\begin{aligned} &\widehat{\Lambda} = \Lambda + k\widehat{\Lambda}_0, \ \mathrm{mod}\, \mathbb{C}\delta, \quad \Lambda \equiv \sum_{i=1}^{r} m_i \Lambda_i \in P_+, \\ &k \equiv \sum_{i=0}^{r} a_i^{\vee} m_i \equiv m_0 + (\Lambda, \theta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \end{aligned} \tag{4.81}$$

が成り立つことがわかる．P_+ の元 Λ を「アフィン・ウェイト $\widehat{\Lambda}$ の古典部分」と呼び，$k\,(=\langle \widehat{\Lambda}, K \rangle)$ を「$\widehat{\Lambda}$ のレベル」と呼ぶことにしよう．$m_0 \geq 0$ であるから，(4.81)の 2 行目の関係式より，重要な条件式；

$$(\Lambda, \theta) \leq k, \tag{4.82}$$

が得られる．すなわち，

$$\begin{aligned} \widehat{P}_+ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \widehat{P}_{+,k}, \\ \widehat{P}_{+,k} &= \{\widehat{\Lambda} \in \widehat{P}_+ \mid \langle \widehat{\Lambda}, K \rangle = k\} \\ &\cong \{\Lambda \in P_+ \mid (\Lambda, \theta) \leq k\} \quad \mathrm{mod}\, \mathbb{C}\delta, \end{aligned} \tag{4.83}$$

と結論される．そこで，

$$\mathbf{P}_{+,k} \equiv \{\Lambda \in P_+ \mid (\Lambda, \theta) \leq k\}, \tag{4.84}$$

とおき，$\mathbf{P}_{+,k}$ の元をレベル k の**可積分ウェイト**と呼ぶことにし，後で明らかにするように，$\widehat{\mathfrak{g}}$ のユニタリ表現(可積分表現)に対応している．レベル k を固定すると可積分ウェイトは有限個しか存在しないことに注意しよう．この事実はカレント代数の共形場理論の状態空間に強い制約を与える．

$\widehat{\mathfrak{g}}$ のワイル・ベクトル $\widehat{\rho}$ は，単純リー代数の場合同様，

$$\widehat{\rho} \equiv \sum_{i=0}^{r} \widehat{\Lambda}_i \tag{4.85}$$

と定義され，基本的な性質として $\langle\hat{\rho}, h_i\rangle=1$, $({}^\forall i=0,\cdots,r)$ を持つ*5．関係式 (4.48) と公式

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = h_{\mathfrak{g}}, \quad \sum_{i=1}^{r} a_i^\vee = h_{\mathfrak{g}}^\vee, \tag{4.86}$$

($h_{\mathfrak{g}}$, $h_{\mathfrak{g}}^\vee$ は，$\mathfrak{g}$ のコクセター数及び双対コクセター数)を用いると，

$$\hat{\rho} = \rho + h_{\mathfrak{g}}^\vee \hat{\Lambda}_0, \tag{4.87}$$

が成り立つことがわかる．

例　アフィン $SU(2)$ ($\widehat{SU}(2)$)

ここで具体例として 4.1 節で扱ったアフィン $SU(2)$ の場合を見ておこう．まず $SU(2)$ の唯一のルート α は単純ルート α_1 であり，$\alpha_0=\delta-\alpha$ である．ルート分解から得られる 2 つの $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 部分代数を：

$$\mathfrak{a}_i \equiv \mathbb{C}h_i \oplus \mathbb{C}E_{\alpha_i} \oplus \mathbb{C}E_{-\alpha_i}, \quad (i=0,1)$$

とすると，カレント代数では，

$$\mathfrak{a}_1 = \langle 2J_0^3,\, J_0^\pm\rangle, \quad \mathfrak{a}_0 = \langle 2I^3,\, I^\pm\rangle \left(\equiv \langle k-2J_0^3,\, J_{\pm 1}^\mp\rangle\right), \tag{4.88}$$

と同一視される(k はカレント代数のレベル)．さらに，$SU(2)$ の基本ウェイト $\Lambda_1=\dfrac{1}{2}\alpha$ であり，レベル k のアフィン・ウェイトは次のように表せる．

$$\hat{\Lambda} = 2j\Lambda_1 + k\hat{\Lambda}_0 \equiv 2j\hat{\Lambda}_1 + (k-2j)\hat{\Lambda}_0 \in \hat{P}_{+,k}, \quad j=0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{k}{2}.$$

これは 4.1 節で考えたスピン j，レベル k の可積分表現に対応している．

(4)　アフィン・ワイル群

$\hat{\mathfrak{g}}$ に対するワイル群(**アフィン・ワイル群**) $\widehat{W}$ は，単純リー代数の場合同様，単純ルート α_i ($i=0,\cdots,r$) のワイル鏡像変換 r_i で生成される離散群として定義

*5　話を簡単にするため，本書ではアフィン・ワイル・ベクトル $\hat{\rho}$ を (4.85) で定義しておく．もし $\langle\hat{\rho}, h_i\rangle=1$, $({}^\forall i=0,\cdots,r)$ によって ρ を定義するならば，やはり $\hat{\rho}$ に $\mathbb{C}\delta$ の元を付け加える不定性が生ずるが，後述する指標公式 (4.110), (4.112), (4.125) などは全てこの不定性は影響しない．

される．単純リー代数の場合との大きな違いは，アフィン・ワイル群 $\widehat{W}$ は無限位数であるという点である．後の応用のためにより詳しく述べると，$\widehat{W}$ は W の元に加え，「並進」；

$$t_\alpha(\lambda) \equiv \lambda + \langle\lambda, K\rangle\alpha - \left\{(\lambda,\alpha) + \frac{1}{2}|\alpha|^2\langle\lambda, K\rangle\right\}\delta$$
$$\equiv \lambda + (\lambda,\delta)\alpha - \left\{(\lambda,\alpha) + \frac{1}{2}|\alpha|^2(\lambda,\delta)\right\}\delta \tag{4.89}$$
$$({}^\forall\alpha \in Q^\vee \equiv \bigoplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}\alpha_i^\vee, \quad {}^\forall\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*),$$

を含んでいる．ここで $Q^\vee$ は単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の余ルート格子である*6．実際，任意の $\mathfrak{g}$ の正ルート $\alpha\in\Delta_+$ に対し，

$$r_{\delta-\alpha}r_\alpha = t_{\alpha^\vee} \tag{4.90}$$

となり，

$$t_\alpha t_\beta = t_{\alpha+\beta}, \quad ({}^\forall\alpha,\beta \in Q^\vee), \tag{4.91}$$

が成立するので，$Q^\vee$ は $\widehat{W}$ の可換な部分群とみなすことができる．さらに証明はしないが，任意の $\widehat{w}\in\widehat{W}$ は，適当な $w\in W$，$\alpha\in Q^\vee$ を選ぶと，$\widehat{W}= w\cdot t_\alpha\,(\equiv t_{w(\alpha)}\cdot w)$ と表すことができる．以上をまとめて，「アフィン・ワイル群 $\widehat{W}$ は $\mathfrak{g}$ のワイル群 W と余ルート格子 $Q^\vee$ の半直積である．」と表現する；

$$\widehat{W} = W \ltimes Q^\vee. \tag{4.92}$$

ここで「半直積」であるとは，W と $Q^\vee$ の作用が可換ではなく，

$$w\cdot t_\alpha\cdot w^{-1} = t_{w(\alpha)}, \quad ({}^\forall w \in W,\ {}^\forall\alpha \in Q^\vee), \tag{4.93}$$

の関係にあることを意味している．関係式(4.92)は指標公式を考える際に重要な役割を果たす．$\widehat{w}\in\widehat{W}$ に対しても単純リー代数のワイル群同様，「長さ」$\ell(\widehat{w})$ が定義される．関係(4.90)から明らかなように，

---

*6 $Q^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の長ルート($(\mathrm{length})^2=2$ となるルート)のみで生成されるルート格子 Q の部分格子と思ってもよい．$\mathfrak{g}$ が simply-laced のときはもちろん $Q^\vee=Q$ である．

$$(-1)^{\ell(t_\alpha\cdot w)}=(-1)^{\ell(w\cdot t_\alpha)}=(-1)^{\ell(w)},\quad ({}^\forall w\in W,\ {}^\forall\alpha\in Q^\vee),\tag{4.94}$$

が成立する．さらに，

$$\widehat{w}(\delta)=\delta,\ \ ({}^\forall\widehat{w}\in\widehat{W}),\quad w(\widehat{\Lambda}_0)=\widehat{\Lambda}_0,\ \ ({}^\forall w\in W),\tag{4.95}$$

が成立することを指摘しておく．$\widehat{W}$ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ への作用は，単純リー代数の場合同様，

$$\begin{aligned}&w(E_{\widehat{\alpha}})=E_{w(\widehat{\alpha})}, &&({}^\forall w\in\widehat{W},\ {}^\forall\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}),\\ &\langle w(\lambda),w(h)\rangle=\langle\lambda,h\rangle, &&({}^\forall\lambda\in\widehat{\mathfrak{h}}^*,\ {}^\forall h\in\widehat{\mathfrak{h}}),\end{aligned}\tag{4.96}$$

によって定義され，$\widehat{\mathfrak{g}}$ の自己同型となる．もちろんこれは内積 $(\ ,\ )$ についての等長変換である．あらわに書くと，$\widehat{\mathfrak{g}}$ の各基底 $E_{\alpha,n}\equiv E_{\alpha+n\delta}\equiv t^n\otimes E_\alpha$，$h_{i,n}\equiv t^n\otimes h_i$ $(i=1,\cdots,r)$，$d=-t\dfrac{d}{dt}$ は，古典部分 $w\in W$ によって，

$$\begin{aligned}&w(E_{\alpha,n})=E_{w(\alpha),n}\equiv t^n\otimes E_{w(\alpha)},\quad w(h_{i,n})=t^n\otimes w(h_i),\\ &w(d)=d,\quad w(K)=K,\end{aligned}\tag{4.97}$$

と変換され，並進 $t_\gamma\,(\gamma\in Q^\vee)$ によって，

$$\begin{aligned}&t_\gamma(E_{\alpha,n})=E_{\alpha,n-(\alpha,\gamma)},\quad t_\gamma(h_{i,n})=h_{i,n}-\delta_{n,0}\langle\gamma,h_i\rangle K,\\ &t_\gamma(d)=d+h[\gamma]-\frac{1}{2}|\gamma|^2K,\quad t_\gamma(K)=K\end{aligned}\tag{4.98}$$

と変換される．この変換が確かに $\widehat{\mathfrak{g}}$ の自己同型となっていることは，$\widehat{\mathfrak{g}}$ の交換関係から容易に確認できる．アフィン・ワイル群 $\widehat{W}$ に対しても(4.60)と全く同様の公式が成立し，内部自己同型群であることがわかる．

4.3.3　可積分表現と指標公式

さて，共形場理論において重要なアフィン・リー代数の可積分表現(可積分加群)について解説しよう．$\widehat{SU}(2)$ については，4.1.1 項で簡単に述べたが，ここでは一般のアフィン・リー代数を考える．さらに**ワイル・カッツ公式**の名前で知られている可積分表現の指標公式について述べる．

(1) 可積分表現

$\widehat{\Lambda}\equiv\Lambda+k\widehat{\Lambda}_0+a\delta\equiv\sum_{i=1}^{r}m_i\Lambda_i+k\widehat{\Lambda}_0+a\delta\in\widehat{P}_{+,k}$ をひとつ固定しよう($m_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a\in\mathbb{C}$). このとき $\widehat{\Lambda}$ に対する最高ウェイト・ベクトル $|\widehat{\Lambda}\rangle$ $(\equiv|\Lambda,k\rangle)$ を単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の場合同様,

$$
\begin{aligned}
&h|\widehat{\Lambda}\rangle=\langle\widehat{\Lambda},h\rangle|\widehat{\Lambda}\rangle, \quad ({}^{\forall}h\in\widehat{\mathfrak{h}}),\\
&E_{\widehat{\alpha}}|\widehat{\Lambda}\rangle=0, \quad ({}^{\forall}\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}_+),
\end{aligned}
\tag{4.99}
$$

と定義する. レベル k のカレント代数との対応;

$$
t^n\otimes u \ \longleftrightarrow \ u_n\equiv(J_n,u), \quad ({}^{\forall}u\in\mathfrak{g}),
\tag{4.100}
$$

$$
J(z)\left(\equiv\sum_a J^a(z)T_a\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{J_n}{z^{n+1}},
\tag{4.101}
$$

を用いると, これは

$$
\begin{aligned}
&h_{i,n}|\widehat{\Lambda}\rangle=m_i\delta_{n,0}|\widehat{\Lambda}\rangle, \quad ({}^{\forall}i=1,\cdots,r,\ {}^{\forall}n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad K|\widehat{\Lambda}\rangle=k|\widehat{\Lambda}\rangle,\\
&E_{\alpha,n}|\widehat{\Lambda}\rangle=0, \quad ({}^{\forall}\alpha\in\Delta,\ {}^{\forall}n\in\mathbb{Z}_{>0}),\\
&E_{\alpha,0}|\widehat{\Lambda}\rangle=0, \quad ({}^{\forall}\alpha\in\Delta_+),
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

と表すことができる. さらに, $d|\widehat{\Lambda}\rangle=a|\widehat{\Lambda}\rangle$ であるから,

$$
d \ \longleftrightarrow \ a+h(\Lambda,k)-L_0
\tag{4.103}
$$

という対応であることがわかる. ここで, $h(\Lambda,k)$ は $|\widehat{\Lambda}\rangle$ の共形次元であり, 菅原構成(3.83)を用いて, $SU(2)$ の場合(4.11)同様,

$$
h(\Lambda,k)=\frac{C_2(\Lambda)}{2(k+h_G^{\vee})}\equiv\frac{(\Lambda,\Lambda+2\rho)}{2(k+h_G^{\vee})},
\tag{4.104}
$$

と与えられる. $C_2(\Lambda)$ は2次のカシミア演算子であり, 公式(4.56)を用いた. (4.102)は $\widehat{SU}(2)$ の最高ウェイト条件(4.5)の自然な拡張になっている.

最高ウェイト・ベクトル $|\widehat{\Lambda}\rangle$ に $\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}_-$ に対する $E_{\widehat{\alpha}}$ を作用させていくことによって, 最高ウェイト表現(最高ウェイト加群)が与えられる. 具体的には,

$$
\prod_{1\leq i_r\leq r,\alpha_p,\alpha_q\in\Delta_+}\ \prod_{n_s>0,m_p>0,l_q\geq 0} h_{i_s,-n_s}E_{\alpha_p,-m_p}E_{-\alpha_q,-l_q}|\widehat{\Lambda}\rangle,
$$

という元で張られるベクトル空間が構成され，これを**バーマ加群**(Verma module)と呼び，以下 $M(\widehat{\Lambda})$ $(\equiv M(\Lambda,k))$ と書く．一般に $M(\widehat{\Lambda})$ は既約ではない．実際，

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{\Lambda},\widehat{\Lambda}-(m_i+1)\alpha_i\rangle \equiv (E_{\alpha_i,0})^{m_i+1}\,|\widehat{\Lambda}\rangle, \quad (i=1,\cdots,r),\\
&|\widehat{\Lambda},\widehat{\Lambda}-(k-(\theta,\Lambda)+1)\alpha_0\rangle \equiv (E_{-\theta,+1})^{k-(\theta,\Lambda)+1}\,|\widehat{\Lambda}\rangle,
\end{aligned}
\tag{4.105}
$$

とおくと，これらはそれぞれ $\widehat{\Lambda}$ を $\widehat{\Lambda}-(m_i+1)\alpha_i$，$\widehat{\Lambda}-(k-(\theta,\Lambda)+1)\alpha_0$ で置き換えた最高ウェイト状態となっていることが確かめられる．これらによって生成されるバーマ加群を $M_i(\widehat{\Lambda})$ $(i=0,\cdots,r)$ と表すと，

$$
\widetilde{M}(\widehat{\Lambda}) \equiv \bigcup_{i=0}^{r} M_i(\widehat{\Lambda}) \tag{4.106}
$$

は $M(\widehat{\Lambda})$ の最大真部分加群となる*7．そして，商空間

$$
L(\widehat{\Lambda}) \equiv M(\widehat{\Lambda})/\widetilde{M}(\widehat{\Lambda}), \tag{4.107}
$$

を考えると，$L(\widehat{\Lambda})$ はアフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の既約表現を与える．このようにして得られる既約表現を最高ウェイト $\widehat{\Lambda}$ を持つ**可積分表現**または**可積分加群**と呼ぶ．物理の文献では便宜的に「最高ウェイト Λ，レベル k の可積分表現」と呼ばれることも多い．

読者は，$\widehat{SU}(2)$ の場合に，最高ウェイト $\widehat{\Lambda}=2j\Lambda_1+k\widehat{\Lambda}_0\equiv 2j\widehat{\Lambda}_1+(k-2j)\widehat{\Lambda}_0$ に対する $L(\widehat{\Lambda})$ が，4.1.1 節で考えたレベル k，スピン j の可積分表現と一致することを確認して欲しい．

コメント　**可積分表現の物理的解釈**　バーマ加群 $M(\widehat{\Lambda})$ には，

$$
\langle\widehat{\Lambda}|\widehat{\Lambda}\rangle = 1, \quad (E_{\alpha,n})^{\dagger} = E_{-\alpha,-n},
$$

と考えることによって自然に内積が定義されるが，この内積は一般に非退化ではない．実際，最大真部分加群 $\widetilde{M}(\widehat{\Lambda})$ は，任意の $M(\widehat{\Lambda})$ の元と直交しており，特にノルム 0 を持つ．量子力学ではこうした状態は物理的とは考えずゼロとみなさなければならない．これが $\widetilde{M}(\widehat{\Lambda})$ で割って商空間を取ることの物理的な意味であり，商空間 $L(\widehat{\Lambda})$ 上に非退

---

*7　念のために $M_i(\widehat{\Lambda})$，$M_j(\widehat{\Lambda})$ $(i\neq j)$ の共通部分は一般に空でないことを指摘しておこう．したがって，(4.106)は直和ではない．

化で正定値の内積が定義されることとなる(つまりユニタリ表現を与える). 単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の場合, こうして定義されるユニタリ表現は有限次元であるが, アフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ では $L(\widehat{\Lambda})$ は無限次元表現となっている点が大きな違いである.

(2) ワイル・カッツ公式

可積分加群 $L(\widehat{\Lambda})$ のウェイト全体の集合を $\mathrm{Wt}(\widehat{\Lambda})$ と表すと, (ベクトル空間としての)直和分解

$$L(\widehat{\Lambda}) = \bigoplus_{\widehat{\lambda}\in \mathrm{Wt}(\widehat{\Lambda})} V_{\widehat{\lambda}}(\widehat{\Lambda}), \tag{4.108}$$

$$h|v\rangle = \langle \widehat{\lambda}, h\rangle |v\rangle, \quad ({}^{\forall}h \in \widehat{\mathfrak{h}},\ {}^{\forall}|v\rangle \in V_{\widehat{\lambda}}(\widehat{\Lambda}))$$

を持つ. $L(\widehat{\Lambda})$ の指標 $\mathrm{ch}_{\widehat{\Lambda}}$ を,

$$\mathrm{ch}_{\widehat{\Lambda}} \equiv \sum_{\widehat{\lambda}\in \mathrm{Wt}(\widehat{\Lambda})} \dim[V_{\widehat{\lambda}}(\widehat{\Lambda})] e^{\widehat{\lambda}}, \tag{4.109}$$

によって定義する. 数学では指数関数 $e^{\widehat{\lambda}}$ を抽象的なものとして考えるが, 物理では具体的に,

$$e^{\widehat{\lambda}}(h) \equiv e^{\langle \widehat{\lambda}, h\rangle}, \quad ({}^{\forall}h \in \widehat{\mathfrak{h}})$$

と, $\widehat{\mathfrak{h}}$ 上の関数と考えて差し支えない. もちろんこの立場では $\mathrm{ch}_{\widehat{\Lambda}}$ も $\widehat{\mathfrak{h}}$ 上の関数とみなされる.

さて, **ワイル・カッツ公式**と呼ばれる指標公式は次のように与えられる;

$$\mathrm{ch}_{\widehat{\Lambda}} = \frac{\displaystyle\sum_{\widehat{w}\in \widehat{W}} (-1)^{\ell(\widehat{w})} e^{\widehat{w}(\widehat{\Lambda}+\widehat{\rho})-\widehat{\rho}}}{\displaystyle\prod_{\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}_+} (1-e^{-\widehat{\alpha}})^{\mathrm{mult}\,\widehat{\alpha}}}. \tag{4.110}$$

単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現論を知っている読者は, この公式が $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の指標公式(ワイル公式)とほとんど同じ形をしていることに気付かれるであろう. 本書のレベルを超えるので与えないが, 証明はほとんど単純リー代数の有限次元既約表現の場合とパラレルに実行することができる. 興味をお持ちの読者は [10] などを参照されたい. 再びルートの重複度 $\mathrm{mult}\,\widehat{\alpha}$ は, アフ

ィン・リー代数の場合は必ずしも1ではないことを注意しておく．(4.110)で $\widehat{\Lambda}=0$ (自明表現)とおくと，$\mathrm{ch}_{\widehat{\Lambda}=0}=1$ となるので，「分母公式」；

$$\prod_{\widehat{\alpha}\in\widehat{\Delta}_+}(1-e^{-\widehat{\alpha}})^{\mathrm{mult}\,\widehat{\alpha}} = \sum_{\widehat{w}\in\widehat{W}}(-1)^{\ell(\widehat{w})}e^{\widehat{w}(\widehat{\rho})-\widehat{\rho}}, \tag{4.111}$$

が得られる．したがって，(4.110)の書き換えとして，

$$\mathrm{ch}_{\widehat{\Lambda}} = \frac{\displaystyle\sum_{\widehat{w}\in\widehat{W}}(-1)^{\ell(\widehat{w})}e^{\widehat{w}(\widehat{\Lambda}+\widehat{\rho})}}{\displaystyle\sum_{\widehat{w}\in\widehat{W}}(-1)^{\ell(\widehat{w})}e^{\widehat{w}(\widehat{\rho})}}, \tag{4.112}$$

が得られる．これも便利な表式である．

共形場理論でよく用いられるカレント代数の指標公式を与えるために，「正規化された指標」$\chi_{\widehat{\Lambda}}$ を [10] に従い，

$$\chi_{\widehat{\Lambda}} \equiv e^{-m_{\widehat{\Lambda}}\delta}\mathrm{ch}_{\widehat{\Lambda}}, \tag{4.113}$$

$$m_{\widehat{\Lambda}} = \frac{(\widehat{\Lambda}+\widehat{\rho},\widehat{\Lambda}+\widehat{\rho})}{2(k+h_G^\vee)} - \frac{(\widehat{\rho},\widehat{\rho})}{2h_G^\vee} \tag{4.114}$$

によって導入しよう．$\chi_{\widehat{\Lambda}}$ は $\widehat{\Lambda}\equiv\Lambda+k\widehat{\Lambda}_0+a\delta$ の a の値に依存しない．実際，$\widehat{W}\cdot\delta=\delta$, $(\widehat{\Lambda}_0,\delta)=1$, $(\alpha_i,\delta)=0$, $({}^\forall i)$ などから，任意のシフト $\widehat{\Lambda}\to\widehat{\Lambda}+b\delta$ に対し，

$$\mathrm{ch}_{\widehat{\Lambda}+b\delta} = e^{b\delta}\mathrm{ch}_{\widehat{\Lambda}}, \quad m_{\widehat{\Lambda}+b\delta} = m_{\widehat{\Lambda}}+b,$$

であることがわかるので，

$$\chi_{\widehat{\Lambda}+b\delta} = \chi_{\widehat{\Lambda}}, \quad ({}^\forall b\in\mathbb{C}) \tag{4.115}$$

が成立する．したがって単純に $a=0$ と考えてよく，このとき(4.114)のなかの $\widehat{\Lambda}$, $\widehat{\rho}$ の ^ を外すことができて，

$$\begin{aligned} m_{\widehat{\Lambda}} &= \frac{(\Lambda+\rho,\Lambda+\rho)}{2(k+h_G^\vee)} - \frac{(\rho,\rho)}{2h_G^\vee} \\ &= \frac{(\Lambda,\Lambda+2\rho)}{2(k+h_G^\vee)} - \frac{k\dim G}{24(k+h_G^\vee)} \equiv h(\Lambda,k) - \frac{c(G,k)}{24} \end{aligned} \tag{4.116}$$

が成立する．ここで，$h(\Lambda,k)$ は共形ウェイト(4.104)，$c(G,k)$ は中心電荷

(3.86)である．1行目から2行目に移行する際，**フロイデンタル・ドブリーズ**(Freudenthal - de Vries)**の公式**

$$(\rho,\rho)=\frac{h_G^\vee}{12}\dim G, \tag{4.117}$$

を用いた．よって，$\widehat{\mathfrak{h}}$ の座標として

$$(\tau,z^i,u)\equiv 2\pi i\left(z^i h_i-\tau d+uK\right),\quad q\equiv e^{2\pi i\tau} \tag{4.118}$$

を導入すると，指標の定義(4.109)により，

$$\chi_{\widehat{\Lambda}}(\tau,z^i,u)=e^{2\pi iku}\mathrm{Tr}_{L(\Lambda,k)}\left[q^{(L_0-\frac{c(G,k)}{24})}e^{2\pi i\sum_{i=1}^{r}z^i h_{i,0}}\right] \tag{4.119}$$

が得られ，これが共形場理論でおなじみの指標である(多くの場合 u=0 とおいたものを考える)．5章で解説するように，因子 $q^{-\frac{c(G,k)}{24}}$ はモジュラー不変性のために重要な役割を果たす．

ワイル・カッツ公式(4.112)をより便利な形に書き直しておこう．アイデアは関係式(4.92)を用いて，アフィン・ワイル群 $\widehat{W}$ についての足し上げを古典部分 W に関する有限和と余ルート格子 $Q^\vee$ についての足し上げに分解することである．そこで余ルート格子 $Q^\vee$ に対するテータ関数を次式で定義しておく；

$$\Theta_{\widehat{\lambda}}\equiv e^{-\frac{(\widehat{\lambda},\widehat{\lambda})}{2k}\delta}\sum_{\alpha\in Q^\vee}e^{t_\alpha(\widehat{\lambda})},\quad (\langle\widehat{\lambda},K\rangle=k). \tag{4.120}$$

これは，因子 $e^{-\frac{(\widehat{\lambda},\widehat{\lambda})}{2k}\delta}$ のおかげで，再びシフト $\widehat{\lambda}\to\widehat{\lambda}+b\delta$ のもとで不変である；

$$\Theta_{\widehat{\lambda}+b\delta}=\Theta_{\widehat{\lambda}},\quad ({}^\forall b\in\mathbb{C}). \tag{4.121}$$

よって，$\widehat{\lambda}=\lambda+k\widehat{\Lambda}_0$, $\lambda\in P$ と考えてよいので，座標(4.118)のもとであらわに計算すると，(4.89)より，

$$\Theta_{\widehat{\lambda}}(\tau,z^i,u)=e^{2\pi iku}\sum_{\gamma\in Q^\vee+k^{-1}\lambda}e^{2\pi ikz^i\langle\gamma,h_i\rangle}q^{\frac{k}{2}(\gamma,\gamma)} \tag{4.122}$$

となる．分解(4.92)をワイル・カッツ公式(4.112)に用い，$(-1)^{\ell(w\cdot t_\alpha)}=(-1)^{\ell(w)}$, $({}^\forall w\in W,\ {}^\forall\alpha\in Q^\vee)$ であることと，$(w(\widehat{\lambda}),w(\widehat{\lambda}))=(\widehat{\lambda},\widehat{\lambda})$, $\langle w(\widehat{\lambda}),K\rangle=$

$\langle\widehat{\lambda}, K\rangle$ $({}^\forall w\in W,\ {}^\forall\widehat{\lambda}\in\widehat{\mathfrak{h}}^*)$に注意すると，

$$\chi_{\widehat{\Lambda}} = \frac{e^{-\frac{(\widehat{\Lambda}+\widehat{\rho},\widehat{\Lambda}+\widehat{\rho})}{2(k+h_G^\vee)}\delta}\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\sum_{\alpha\in Q^\vee}e^{t_\alpha\left(w(\widehat{\Lambda}+\widehat{\rho})\right)}}{e^{-\frac{(\widehat{\rho},\widehat{\rho})}{2h_G^\vee}\delta}\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\sum_{\alpha\in Q^\vee}e^{t_\alpha(w(\widehat{\rho}))}}$$

$$= \frac{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\Theta_{w(\widehat{\Lambda}+\widehat{\rho})}}{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\Theta_{w(\widehat{\rho})}}. \tag{4.123}$$

最後にテータ関数の交代和

$$A_{\widehat{\lambda}} \equiv \sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\Theta_{w(\widehat{\lambda})} \tag{4.124}$$

を導入すると，

$$\chi_{\widehat{\Lambda}} = \frac{A_{\widehat{\Lambda}+\widehat{\rho}}}{A_{\widehat{\rho}}} \tag{4.125}$$

が得られる．指標公式(4.125)が求める公式である．たとえば，4.1.1 項で考えた $\widehat{SU}(2)$ のスピン $\frac{\ell}{2}$，レベル k の可積分表現 $L(\ell, k)$ では，$\widehat{\mathfrak{h}}$ の座標を $(\tau, \frac{z}{2}, 0)$ *8と取ることにより，既に与えた指標公式(4.15)を再現する．

4.3.4 スペクトラル・フロー対称性

本節の最後に指標 $\chi_{\widehat{\Lambda}}$ の持つ重要な対称性について論じておきたい．まず単純リー代数の指標同様，$\chi_{\widehat{\Lambda}}$ はアフィン・ワイル群 $\widehat{W}$ の変換に対し不変である；

$$\chi_{\widehat{\Lambda}}(\widehat{w}(\xi)) = \chi_{\widehat{\Lambda}}(\xi), \quad ({}^\forall\widehat{w}\in\widehat{W}). \tag{4.126}$$

ここで(4.118)にならい，$\widehat{\mathfrak{h}}$ の座標を，

$$\xi \equiv (\tau, z^i, u) \equiv 2\pi i(z^i h_i - \tau d + uK),$$

と表し，$\widehat{W}$ の作用は $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上の自己同型として(4.97)，(4.98)によって与えられて

*8 $SU(2)$ の場合，物理でよく用いる基底 $T^3=\frac{1}{2}\sigma_3$ とカルタン・ワイル基底 h_1 の関係は，$T^3=\frac{1}{2}h_1$ であることに注意．

いる．この不変性は，$\widehat{W}$ が内部自己同型であって，可積分表現 $L(\widehat{\Lambda})$ を不変に保つことから明らかである：

$$\widehat{w} \ : \ L(\widehat{\Lambda}) \ \stackrel{\cong}{\longrightarrow} \ L(\widehat{\Lambda}), \quad ({}^{\forall}\widehat{w} \in \widehat{W}). \tag{4.127}$$

次に，$\widehat{W}{\cong}W{\ltimes}Q^{\vee}$ の対称性を，余ルート格子 $Q^{\vee}$ を Q の双対格子

$$Q^{*} \equiv \left\{\gamma \in \mathfrak{h}^{*} \ : \ (\gamma,\alpha) \in \mathbb{Z}, \ ({}^{\forall}\alpha \in Q)\right\} \tag{4.128}$$

に広げることによって拡大してみよう[*9]．すなわち，$\widetilde{W}{\equiv}W{\ltimes}Q^{*}$ とおくと，$\widetilde{W}$ の元は(4.97)，(4.98)によってやはり $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上の自己同型を与える．特に並進 $t_{\gamma}({}^{\forall}\gamma{\in}Q^{*})$ が $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上の自己同型として well-defined になっている点に注意されたい．この Q^{*} による自己同型変換 t_{γ} のことを**スペクトラル・フロー**と呼ぶ．もちろんスペクトラル・フローはアフィン・ワイル群の並進部分をその部分群として含んでいる．

$\widetilde{W}$ の構造をさらに詳しく見るために，

$$\widetilde{W}_{0} \equiv \left\{\sigma \in \widetilde{W} \ : \ \sigma(\widehat{\Delta}_{+}) = \widehat{\Delta}_{+}\right\}, \tag{4.129}$$

とおく．このとき可換群として $\widetilde{W}_{0}{\cong}Q^{*}/Q^{\vee}$ ($\cong$Center(G)) であり，

$$\widetilde{W} \cong \widetilde{W}_{0}{\ltimes}\widehat{W}\left(\sim Q^{*}/Q^{\vee}{\times}Q^{\vee}{\times}W\right), \tag{4.130}$$

が成り立つ．$\widetilde{W}_{0}$ は一般に $\widehat{\mathfrak{g}}$ の拡大ディンキン図形の対称性変換(の部分群)という意味を持ち，たとえば $\widehat{SU}(N)$ では，$\widetilde{W}_{0}{\cong}\mathbb{Z}_{N}$ であって，N 個の単純ルート $\alpha_{i}(i{=}0,\cdots,N{-}1)$ に巡回置換として作用する．定義(4.129)より明らかに任意の $\widetilde{W}_{0}$ の元 σ は $\widehat{P}_{+,k}$ を不変に保つ．

$\widetilde{W}_{0}$ の元は外部自己同型であり，したがって $\widetilde{W}$ も外部自己同型群である．よって $\widetilde{W}$ の作用は一般に可積分表現 $L(\widehat{\Lambda})$ を別の可積分表現に写像する．すなわち，$\widetilde{w}{=}\sigma{\cdot}\widehat{w}$ $(\sigma{\in}\widetilde{W}_{0}, \widehat{w}{\in}\widehat{W})$ を $\widetilde{w}{\in}\widetilde{W}$ の一意分解であるとすれば，(4.127)

---

*9　格子の包含関係は，一般に

$$Q^{\vee} \subset Q \subset P, \quad Q^{\vee} \subset Q^{*} \subset P$$

であり，定義により $P{=}(Q^{\vee})^{*}$ である．G が simply laced の場合は，$Q^{\vee}{=}Q$，$P{=}Q^{*}$ となって話が単純になる．

の代わりに

$$\widetilde{w} \;:\; L(\widehat{\Lambda}) \stackrel{\cong}{\longrightarrow} L(\sigma(\widehat{\Lambda})), \tag{4.131}$$

が成立する．この事実に対応して指標の恒等式

$$\chi_{\sigma(\widehat{\Lambda})}(\widetilde{w}(\xi)) = \chi_{\widehat{\Lambda}}(\xi), \quad ({}^{\forall}\widetilde{w} = \sigma{\cdot}\widehat{w} \in \widetilde{W},\ \sigma \in \widetilde{W}_0,\ \widehat{w} \in \widehat{W}), \tag{4.132}$$

が成立する．特にスペクトラル・フロー $t_\gamma (\gamma{\in}Q^*)$ に対しては，$[\gamma]{\in}Q^*/Q^\vee$，$t_\gamma{=}\sigma_{[\gamma]}{\cdot}\widehat{w}$, $\sigma_{[\gamma]}{\in}\widetilde{W}_0$, $\widehat{w}{\in}\widehat{W}$ とおくとき，

$$\chi_{\sigma_{[\gamma]}(\widehat{\Lambda})}(t_\gamma(\xi)) = \chi_{\widehat{\Lambda}}(\xi), \tag{4.133}$$

が成立する．また，${}^{\forall}\widehat{\lambda}{\in}\widehat{P}$, $(\langle\lambda, K\rangle{=}k)$ に対して，

$$t_\gamma(\widehat{\lambda}) = \widehat{\lambda}{+}k\gamma,\ \mathrm{mod}\,\mathbb{C}\delta,$$

となるので，テータ関数(4.120)に対しては，

$$\Theta_{\widehat{\lambda}+k\gamma}(t_\gamma(\xi)) = \Theta_{\widehat{\lambda}}(\xi), \quad ({}^{\forall}\gamma \in Q^*), \tag{4.134}$$

が成立する．

スペクトラル・フロー対称性は 6.4 節で扱うコセット構成や 7 章で扱う超共形場理論においても重要な役割を果たす．また(弱)ヤコビ形式と呼ばれる拡張された保型形式とも深い関係にある(ヤコビ形式については [13] を参照)．

具体例として $\widehat{SU}(2)$ のケースを見てみよう：

例　$\widehat{SU}(2)$ のスペクトラル・フロー

$\widehat{SU}(2)$ のレベル k の可積分表現を考えよう．スペクトラル・フローを $s_n{\equiv}t_{\frac{n}{2}\alpha}$, $(n{\in}\mathbb{Z})$ と表すことにする(α は $SU(2)$ の単純ルート)．このとき $\widetilde{W}_0{\cong}\mathbb{Z}_2$ であり，$n{\in}2\mathbb{Z}$ であれば $s_n{\in}\widehat{W}$ である．また $n{\in}2\mathbb{Z}{+}1$ のとき s_n は非自明な外部自己同型 σ を含み，σ は $\widehat{SU}(2)$ の 2 つの単純ルート $\alpha_0{\equiv}\delta{-}\alpha$, $\alpha_1{\equiv}\alpha$ の交換として作用する．すなわち，レベル k の可積分表現に対し，

$$\sigma \;:\; (k{-}\ell)\widehat{\Lambda}_0{+}\ell\widehat{\Lambda}_1 \left(\equiv \ell\Lambda_1{+}k\widehat{\Lambda}_0\right) \stackrel{\cong}{\longrightarrow} \ell\widehat{\Lambda}_0{+}(k{-}\ell)\widehat{\Lambda}_1 \left(\equiv (k{-}\ell)\Lambda_1{+}k\widehat{\Lambda}_0\right),$$

と作用することがわかる．(4.98)を用いて s_n のカレントへの作用をあらわに書くと，

$$s_n \ : \ J^3_m \ \to \ J^3_m - \frac{k}{2} n \delta_{m,0}, \quad J^{\pm}_m \ \to \ J^{\pm}_{m \mp n}, \tag{4.135}$$

である．さらに菅原構成によるビラソロ演算子に対しては，公式(3.83)を用いると，

$$s_n \ : \ L_m \ \to \ L_m - n J^3_m + \frac{k}{4} n^2 \delta_{m,0}, \tag{4.136}$$

と変換されることがわかる(カレントの正規順序に注意)．特に L_0 への作用は，s_n の d への作用と無矛盾になっている．

指標のスペクトラル・フロー対称性(4.133)は，

$$s_n \ : \ \left(\tau, \frac{z}{2}, 0\right) \ \longmapsto \ \left(\tau, \frac{z-n\tau}{2}, \frac{n^2}{4}\tau - \frac{n}{2} z\right),$$

に注意すると，

$$q^{\frac{k}{4}n^2} y^{-\frac{k}{2}n} \chi_{\ell,k}(\tau, z-n\tau) = \begin{cases} \chi_{\ell,k}(\tau,z) & (n \in 2\mathbb{Z}), \\ \chi_{k-\ell,k}(\tau,z) & (n \in 2\mathbb{Z}+1), \end{cases} \tag{4.137}$$

と表される．さらに(4.134)は，付録に与えている恒等式(A.13)

$$q^{\frac{k}{4}n^2} y^{-\frac{k}{2}n} \Theta_{m+kn,k}(\tau, z-n\tau) = \Theta_{m,k}(\tau, z), \tag{4.138}$$

に帰着する．これは(弱)ヤコビ形式の擬2重周期性と呼ばれる性質と関係する恒等式である．(4.15)及びテータ関数に対するスペクトラル・フロー対称性(4.138)を用いて，恒等式(4.137)を導出することも容易である．

5

モジュラー不変性

この章ではジーナス(種数) 1 のリーマン面(=トーラス)上の共形場理論を考える．弦理論においては，トーラス上の共形場理論は閉弦の 1 ループの散乱振幅を考えることに相当する．トーラス上の共形場理論の分配関数は，「モジュラー不変性」と呼ばれる著しい性質を示す．モジュラー不変性は弦理論が紫外発散を持たないことの鍵となる考え方であり，また理論の整合性に強い制限を課す．

5.1 トーラスとモジュラー変換

トーラスとはジーナス(種数) 1 のリーマン面であり，$S^1 \times S^1$ と同相である．トーラスは通常，複素平面 $\mathbb{C}$ の 2 次元格子 Λ による商空間 $\mathbb{C}/\Lambda$ として記述される(図 5.1)．(ω_1, ω_2) を 2 次元格子 Λ の基底としよう；

$$\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \in \mathbb{C} \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

ここで，一般性を失わず，ω_1, ω_2 は，$\mathrm{Im}\,(\omega_2/\omega_1) > 0$ と仮定することができる．共形場理論は共形構造(≅ 複素構造)にのみ依存するので，計量をスケール変換しても物理量は不変であり，基底 (ω_1, ω_2) をスケール変換して $(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) \equiv (1, \tau)$ としてもよい．すなわち，トーラスの複素構造は，ω_1 と ω_2 の比；

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \qquad \mathrm{Im}\,\tau > 0$$

によってパラメータ化されることとなる．しかしながら，複素パラメータ τ の選び方は一意ではない．実際，基底 (ω_1, ω_2) で定義される 2 次元格子 Λ は，次のように定義される (ω_1', ω_2') によって生成される格子と等価である；

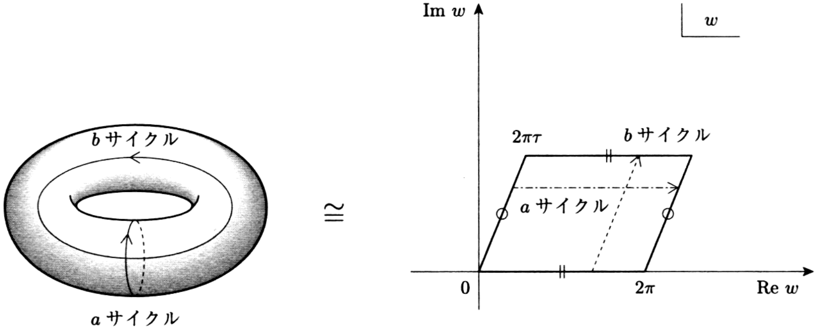


図 5.1　トーラス=ℂ/Λ

$$\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \ ad-bc = 1. \tag{5.1}$$

すなわち，

$$\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \tag{5.2}$$

の関係があるとき，τ と τ' は等価な複素構造を与える．こうした 1 次分数変換(5.2)のもとで同一視した複素パラメータ τ をトーラスの**モジュライ**と呼ぶ．一次分数変換(5.1)は自然な積構造により無限位数の離散群をなし，**モジュラー群**と呼ばれる．

もう少し精密にモジュラー群の構造を見てみよう．行列の集合

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \ ad-bc = 1 \right\}$$

は行列の通常の積によって群をなし，$A \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対し，対応する 1 次分数変換を

$$\gamma_A(\tau) \equiv \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \tag{5.3}$$

と表すと，容易にチェックできるように，

$$\gamma_A \circ \gamma_B(\tau) = \gamma_{AB}(\tau) \tag{5.4}$$

が成り立つ．つまり，写像：$A \mapsto \gamma_A$ は，$SL(2,\mathbb{Z})$ からモジュラー群への準同型を与え，$\pm I$ (I は単位行列)に対し，$\gamma_{\pm I}$ は恒等写像を与えるから，モジュラー群は，商群 $PSL(2,\mathbb{Z}) \equiv SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ と同型であることがわかる．

証明は省略するが，$SL(2,\mathbb{Z})$ は次の 2 つの元

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

によって生成されることが知られている．簡単な計算により，

$$S^2 = (ST)^3 = C(\equiv -I)$$

であることが確かめられ，既に述べたように C は自明なモジュラー変換に対応している．行列 S, T に対応するモジュラー変換は，

$$\gamma_S \ : \ \tau \to -\frac{1}{\tau}, \quad \gamma_T \ : \ \tau \to \tau+1 \tag{5.5}$$

のように与えられ，それぞれ**モジュラー S 変換**，**モジュラー T 変換**と呼ばれる．以後，記号を簡単化するため，(5.5) を

$$S \ : \ \tau \to -\frac{1}{\tau}, \quad T \ : \ \tau \to \tau+1$$

と表すことにしよう．

さて，それではトーラスのモジュライのなす空間(**モジュライ空間**)はどのように表されるであろうか？ 上の議論より，モジュライ空間は複素上半平面 $\mathbb{H}$ をモジュラー群 $PSL(2,\mathbb{Z})$ で割った商空間として定義されるであろう．この商空間はモジュラー群の作用の基本領域：

$$\mathcal{F} \equiv \left\{ \tau \in \mathbb{C} \ \middle| \ \mathrm{Im}\,\tau > 0, \ |\mathrm{Re}\,\tau| \leq \frac{1}{2}, \ |\tau| \geq 1 \right\}, \tag{5.6}$$

によって表すのが便利である(図 5.2 参照)．すなわち，複素上半平面 $\mathbb{H}$ 上の任意の点 τ は，適当な $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ と $\tau_0 \in \mathcal{F}$ を選ぶことによって，$\tau = \gamma_A(\tau_0)$ と表すことができる(τ_0 は τ から一意に定まるが，行列 A は必ずしも一意で

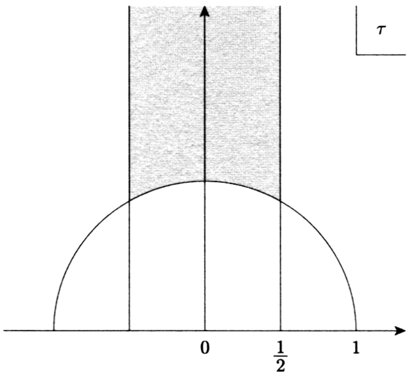


図 **5.2** モジュラー群の基本領域

はない).

コメント **荷電共役変換** 共形場理論が $U(1)$ のカレント代数の対称性も含む場合，そのゼロ・モードによる「ねじれ」のパラメータ z も含めて考えると便利なことがある(z はいわゆるヤコビアン $\mathrm{Jac}(\Sigma)$ の座標と同定される)．この場合，モジュラー変換(5.3)は，

$$\gamma_A(\tau,z)=\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right) \tag{5.7}$$

と拡張される．すなわち，S 変換，T 変換はこの場合，

$$S\ :\ (\tau,z)\ \longrightarrow\ \left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right),\quad T\ :\ (\tau,z)\ \longrightarrow\ (\tau+1,z) \tag{5.8}$$

と作用し，行列 C は非自明となって，

$$C\ :\ (\tau,z)\ \longrightarrow\ (\tau,-z) \tag{5.9}$$

を与える．このため C 変換は「荷電共役変換」と同一視される．

5.2 トーラス分配関数

トーラス上の共形場理論を考えよう．最も簡単な相関関数はゼロ点の相関関数，すなわち分配関数である．共形不変性により分配関数 Z は，トーラスの複素構造でのみ決まり，計量には依存しない．つまり分配関数 Z はモジ

ュライ τ の関数として与えられる．さらにモジュラー変換：$\tau \mapsto \gamma_A(\tau)$ ($^\forall A \in SL(2,\mathbb{Z})$) のもとでトーラスの複素構造は不変であるから，分配関数 Z は，

$$Z(\gamma_A(\tau), \overline{\gamma_A(\tau)}) = Z(\tau, \bar{\tau}), \quad (^\forall A \in SL(2,\mathbb{Z})), \tag{5.10}$$

という性質を持つはずである．これを**モジュラー不変性**と呼び，トーラス上の共形場理論の最も基本的な性質である．モジュラー群は T 変換と S 変換(5.5)によって生成されるから，モジュラー不変性は，

$$Z(\tau{+}1, \bar{\tau}{+}1) = Z(\tau, \bar{\tau}), \quad Z\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\bar{\tau}}\right) = Z(\tau, \bar{\tau})$$

が成立することだと言い換えてもよい．

いくつかの簡単な例について具体的にトーラス分配関数を計算してみよう．

5.2.1 自由ボソン場：経路積分

まず一番簡単な自由な1成分の(実)スカラー場 $X(w, \bar{w})$ を考えよう．経路積分の立場では分配関数は

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \int \mathcal{D}X \, e^{-S[X]} \tag{5.11}$$

と書かれる．ここで $S[X]$ は自由ボソン場の作用(1.134)である．トーラス上の境界条件はスカラー場に2重周期性を課せばよく，

$$X(w{+}2\pi, \bar{w}{+}2\pi) = X(w, \bar{w}), \quad X(w{+}2\pi\tau, \bar{w}{+}2\pi\bar{\tau}) = X(w, \bar{w}), \tag{5.12}$$

と与えられる．もうひとつのよく用いられる座標 $z \equiv e^{iw}$ においては，周期性 $w \sim w+2\pi$ は自動的に考慮されており，1.6.1項で解説したようにユークリッド時間方向が動径方向になっている．世界面トーラスは，同一視 $z \sim e^{2\pi i \tau} z$ によって定義される．ここでは簡単のため，X は実数値全体をとると仮定するが，より非自明な例として円周上にコンパクト化されたスカラー場も考えることができ，この場合，境界条件(5.12)は巻きつき数を考慮して修正を受ける．この興味深い例はこの節の後半で議論しよう．

経路積分(5.11)を実行する際，境界条件(5.12)を考慮に入れなければならない．そこで便利な実変数として次の ξ_1, ξ_2 を導入しよう；

$$w = \xi_1 - \tau\xi_2, \quad \bar{w} = \xi_1 - \bar{\tau}\xi_2. \tag{5.13}$$

ここで，ξ_2 の符号はローレンツ計量の世界面から正しい方向にウィック回転したとき，ユークリッド時間の増加する向きに合わせてある．このとき境界条件(5.12)を満たすスカラー場 X は，

$$X(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} X_{m,n} \exp\left[i\left(m\xi_1 + n\xi_2\right)\right], \quad X^*_{m,n} = X_{-m,-n}$$

とフーリエ級数で表すことができ，$\partial_w = \frac{i}{2\tau_2}\left(\bar{\tau}\partial_{\xi_1} + \partial_{\xi_2}\right)$，$\bar{\partial}_{\bar{w}} = -\frac{i}{2\tau_2}(\tau\partial_{\xi_1} + \partial_{\xi_2})$，$d^2w = \tau_2 d\xi_1 d\xi_2$ ($\tau \equiv \tau_1 + i\tau_2$, $\tau_i \in \mathbb{R}$ とする)などに注意すると，

$$\begin{aligned} S &= \frac{\tau_2}{\pi\alpha'} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{\pi^2}{\tau_2^2} |m\tau + n|^2 |X_{m,n}|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n^2}{\tau_2\alpha'} \left(x^2_{0,n} + y^2_{0,n}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\pi |m\tau + n|^2}{\tau_2\alpha'} \left(x^2_{m,n} + y^2_{m,n}\right), \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$x_{m,n} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_{m,n} + X^*_{m,n}\right), \quad y_{m,n} \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}\left(X_{m,n} - X^*_{m,n}\right)$$

を得る．自然な経路積分測度として，フーリエ係数を取り出して，

$$\mathcal{D}X \equiv dX_{0,0} \prod_{n=1}^{\infty} dx_{0,n} dy_{0,n} \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{n\in\mathbb{Z}} dx_{m,n} dy_{m,n} \tag{5.15}$$

と定義しよう．しかしながら，ゼロ・モード $X_{0,0}$ の積分は自明に発散する体積因子を与えるので我々は興味がない．そこで，それを除いた積分測度を $\mathcal{D}'X$ と書いて，それによって分配関数を定義することにしよう．積分はガウス積分であるからただちに実行でき，(5.14)を用いると，

$$Z = \int \mathcal{D}'X\, e^{-S} = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\tau_2\alpha'}\right)^{-1} \cdot \left(\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|m\tau + n|^2}{\tau_2\alpha'}\right)^{-1} \equiv A^{-1} \cdot B^{-1}. \tag{5.16}$$

無限積 A, B は発散しており正則化が必要となるが，通常次のような「ζ 関数正則化」が用いられる．ζ 関数 $\zeta(s)$ は，$\mathrm{Re}\, s > 1$ のときに収束する無限級数；

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{5.17}$$

によって与えられ，$\mathrm{Re}\, s \le 1$ の領域では解析接続によって定義する．ζ 関数正則化とは，たとえば発散級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ を形式的に $\zeta(-1)$ で置き換えることを意味する．$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$，$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$，$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi$ などが知られているから，ζ 関数正則化のもとでは，

$$\prod_{n=1}^{\infty} a \quad \Longrightarrow \quad a^{\zeta(0)} = a^{-1/2}, \tag{5.18}$$

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} a \quad \Longrightarrow \quad a^{2\zeta(0)+1} = 1, \tag{5.19}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} = e^{\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \ln n} \quad \Longrightarrow \quad e^{-\alpha\zeta'(0)} = (2\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \tag{5.20}$$

などの公式が得られる（(5.20)においては，$\zeta(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{s \ln n}$ であることを用いた）．さらにこれらと三角関数の無限積表示の公式：

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{5.21}$$

を組み合わせると，

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} (n+a) \quad \Longrightarrow \quad -2i \sin \pi a \tag{5.22}$$

が得られる．詳細は読者の練習問題とするが，これらの結果を用いると，

$$A \quad \Longrightarrow \quad 2\pi\sqrt{\alpha'\tau_2}, \quad B \quad \Longrightarrow \quad \left| q^{\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^m) \right|^2 \equiv |\eta(\tau)|^2$$

($q \equiv e^{2\pi i \tau}$, $\tau \equiv \tau_1 + i\tau_2$, $\tau_i \in \mathbb{R}$) が得られる．$\eta(\tau)$ はエータ関数(2.36)である．すなわち自由ボソン場のトーラス分配関数は，

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha'\tau_2}\, |\eta(\tau)|^2} \tag{5.23}$$

と計算された．

分配関数(5.23)は期待通りモジュラー不変である．すなわち

$$Z\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\bar{\tau}}\right) = Z(\tau, \bar{\tau}), \quad Z(\tau+1, \bar{\tau}+1) = Z(\tau, \bar{\tau})$$

を満足する．実際，$\eta(\tau)$ に対し次のモジュラー変換公式が成り立つ（付録(A.34)，(A.35)参照）；

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau),\quad \eta(\tau+1)=e^{2\pi i\frac{1}{24}}\eta(\tau).$$

そして τ_2 は，S 変換 $\tau\rightarrow\tilde{\tau}\equiv-\dfrac{1}{\tau}$ のもとで，$\tilde{\tau}_2=\dfrac{\tau_2}{|\tau|^2}$ とふるまうので，組み合わせ $\sqrt{\tau_2}\,|\eta(\tau)|^2$ は S 変換で不変である．また T 変換での不変性は自明であろう．

コメント　**ζ 関数正則化について**　形式的な分配関数(5.16)は，

$$Z=\left\{\prod_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{|m\tau+n|^2}{\tau_2\alpha'}\right\}^{-1/2} \tag{5.24}$$

と書き直してみればわかりやすいが，明白にモジュラー不変である．したがって，**モジュラー不変性を保つ正則化**が求められるわけであり，それが ζ 関数正則化の持つ意義である．ちょうどゲージ理論において，次元正則化がゲージ不変性を保つ正則化であるために有用である事情と似ている．

もう少し物理的に考えるために，例としてシリンダー $w\sim w+2\pi$ 上の自由な複素スカラー場 $X(w,\bar{w})$ の零点振動のエネルギーを取り上げてみよう．ただしここでは境界条件として「ひねり」(twisting)を入れて，

$$X(w+2\pi,\bar{w}+2\pi)=e^{2\pi i\theta}X(w,\bar{w}), \tag{5.25}$$

を考える．$\theta\,(0\leq\theta<1)$ が「ひねり」のパラメータである．容易にわかるように，この系のゼロ点振動のエネルギーは，発散する無限和

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\theta),$$

で与えられる．演算子の正規順序の定義としてこの発散項を単純に差し引いてゼロとおくのは，ここで考えているケースではうまくいかない．モジュラー変換によって境界条件が影響を受けてしまうので，素朴な無限大の引き算はモジュラー不変性を壊してしまうのである．我々が求めているのはモジュラー不変性を保つような正則化であるから，**境界条件によらない紫外発散部分を差し引く**べきである．すなわち，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\theta)\;\Longrightarrow\;\sum_{n=0}^{\infty}(n+\theta)-\int_0^{\infty}kdk,$$

とする．これは，場の理論でおなじみの「カシミア効果」の計算であることに気付かれるであろう．もう少し精密に第 1 項と第 2 項に収束因子を入れて計算すると，

$$\begin{aligned}
\Delta_\epsilon(\theta) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty}(n+\theta)e^{-\epsilon(n+\theta)}-\int_0^\infty dk\,ke^{-\epsilon k}\\
&= -\frac{d}{d\epsilon}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\epsilon(n+\theta)}-(-1)\frac{d}{d\epsilon}\int_0^\infty dk\,e^{-\epsilon k}\\
&= \frac{e^{-\epsilon(\theta+1)}}{(1-e^{-\epsilon})^2}+\frac{\theta e^{-\epsilon\theta}}{1-e^{-\epsilon\theta}}-\frac{1}{\epsilon^2}\\
&= -\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\theta(1-\theta)+O(\epsilon)
\end{aligned}$$

が得られる．したがって，求める正則化の公式として，$\epsilon\to+0$ の極限を取り，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\theta) \implies -\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\theta(1-\theta)\equiv\frac{1}{24}-\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2, \tag{5.26}$$

を得る．これは，シリンダー上の自由場の零点エネルギーを与える公式として有用なものである．

それでは ζ 関数正則化ではどのように評価されるであろうか？ それには，ζ 関数の若干の一般化を必要とし，「一般化された ζ 関数」；

$$\zeta(s,a)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^s}, \tag{5.27}$$

を導入しよう．定義より $\zeta(s,1)=\zeta(s)$ であり，$\mathrm{Re}\,s>1$ であれば級数は絶対収束している．再び一般の複素数 s に対しては解析接続によって定義する．我々に必要な公式は次の通りである；

$$\zeta(-m,a)=-\frac{B_{m+1}(a)}{n+1},\quad (m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}). \tag{5.28}$$

ここで $B_n(x)$ は「n 次のベルヌーイ多項式」と呼ばれ，母関数表示

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{5.29}$$

によって定義される[*1]．$B_2(x)=x^2-x+\dfrac{1}{6}$ なので，ζ 関数正則化によって，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\theta) \implies \zeta(-1,\theta)=-\frac{B_2(\theta)}{2}=-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\theta(1-\theta), \tag{5.30}$$

となり，これは上で求めたカシミア・エネルギーを用いた正則化の公式(5.26)を正確に再現している．

*1 $B_n\equiv B_n(1)$ がいわゆるベルヌーイ数である．

5.2.2 自由ボソン場：演算子形式

上で求めた分配関数(5.23)は演算子形式のもとで容易に解釈できる．演算子形式では，ユークリッド時間のコンパクト化，すなわちシリンダー $w \sim w+2\pi$ 上の共形場理論における逆温度 $\beta=2\pi\tau_2$ を持つ有限温度系を扱っていることに相当する．したがって分配関数は，$Z \sim \mathrm{Tr}\,[e^{-\beta H_{\mathrm{cyl}}}]$ のように与えられそうだが，ここでユークリッド時間方向を1周する際に，空間方向に τ_1 だけシフトされることに注意しなければならない．つまり求めるトーラス分配関数は，

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \mathrm{Tr}\left[e^{-2\pi\tau_2 H_{\mathrm{cyl}}+2\pi i\tau_1 P_{\mathrm{cyl}}}\right], \qquad (5.31)$$

と評価されるであろう．ここで H_{cyl}，P_{cyl} はそれぞれシリンダー上の(すなわち w-座標での)ハミルトニアン，運動量演算子であり，ビラソロ演算子を用いて次のように表される；

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{cyl}} &= L_0^{\mathrm{cyl}}+\widetilde{L}_0^{\mathrm{cyl}} = L_0+\widetilde{L}_0-\frac{1}{12}, \\ P_{\mathrm{cyl}} &= L_0^{\mathrm{cyl}}-\widetilde{L}_0^{\mathrm{cyl}} = L_0-\widetilde{L}_0. \end{aligned} \qquad (5.32)$$

ここで L_n^{cyl}，L_n はそれぞれシリンダー(w-座標)，複素平面(z-座標)のビラソロ演算子であり，関係式(1.124)を用いた(この場合，中心電荷は $c=1$)．これはまた L_n^{cyl} の零点振動のエネルギーを ζ 関数正則化(あるいは公式(5.26))を用いて評価することによっても得られる．そこで分配関数(5.31)は，

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \mathrm{Tr}\left[e^{-2\pi\tau_2\left(L_0+\widetilde{L}_0-\frac{1}{12}\right)+2\pi i\tau_1\left(L_0-\widetilde{L}_0\right)}\right] \equiv \mathrm{Tr}\left[q^{L_0-\frac{1}{24}}\,\bar{q}^{\widetilde{L}_0-\frac{1}{24}}\right], \qquad (5.33)$$

と表されることとなる($q \equiv e^{2\pi i\tau}$)．このように正則部分(left-mover)と反正則部分(right-mover)に因子化されるのが共形場理論の特徴である．

(5.33)のトレースを評価するのは容易である．まず，モード展開(1.143)とビラソロ演算子(1.151)を思い出そう．L_0 の振動子部分 $N_{\mathrm{osc}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n$ については，α_{-n} がエネルギー n を持つボソンの生成演算子であって，それぞれ $(1-q^n)^{-1}$ の寄与を与えるので，

$$\mathrm{Tr}\left[q^{N_{\mathrm{osc}}}\right] = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}$$

を与える．$\widetilde{L}_0$ の振動子部分も独立に計算でき，もちろん全く同様の結果を与える．

一方，ゼロ・モード部分は X の重心運動量に相当し，正則，反正則部分は独立ではない．そこで運動量の次元を持つように，(1.143)に対し，

$$\alpha_0 = \widetilde{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p, \tag{5.34}$$

とパラメータ化しよう．すなわち，L_0，$\widetilde{L}_0$ へのゼロ・モードの寄与は，$L_0 = \widetilde{L}_0 = \dfrac{\alpha'}{4}p^2$ となる．重心運動量 p は連続的であるからトレースは積分で計算される；

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[q^{\frac{\alpha'}{4}p^2}\bar{q}^{\frac{\alpha'}{4}p^2}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\langle p|p\rangle\, e^{-4\pi\tau_2\frac{\alpha'}{4}p^2} \\ &= (\mathrm{volume})\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\pi\alpha'\tau_2 p^2} = (\mathrm{volume})\times\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha'\tau_2}}.\end{aligned} \tag{5.35}$$

ここで，(volume) はゼロ・モード X_0 の自由度からくる無限大の体積因子であり，

$$\langle p|p\rangle = \delta(0) = \frac{1}{2\pi}\int dx\, e^{ix\cdot 0} = \frac{1}{2\pi}\times(\mathrm{volume})$$

を使った．

以上のようにして，再び体積因子を落とすと，

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha'\tau_2}}\times\frac{1}{\left|q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\right|^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha'\tau_2}\,|\eta(\tau)|^2}, \tag{5.36}$$

が得られ，期待通り(5.23)を再現した．

5.2.3 自由フェルミオン場

次の簡単な例として，トーラス上の自由なマヨラナ・フェルミオン場を考えよう．1.8.3 項の記号を用いることとし，作用は(1.171)で与えられている．以下の議論では w-座標を用いることとし，簡単のため，$\psi_{(w)}$，$\widetilde{\psi}_{(\bar{w})}$ を ψ，$\widetilde{\psi}$ と書くことにしよう．トーラスは再び同一視；

$$w \sim w+2\pi, \quad w \sim w+2\pi\tau$$

によって定義されるから，座標 ξ_1, ξ_2 (5.13)を導入するのが便利である．しかしながら，今度は場 ψ がスピン $\frac{1}{2}$ のスピノル場であるので，一般に 2 価の関数であってもよい．言い換えれば，境界条件はスカラー場の(5.12)より複雑なものとなる；

$$\psi(\xi_1+2\pi, \xi_2) = \epsilon_S \psi(\xi_1, \xi_2)\ , \quad \psi(\xi_1, \xi_2+2\pi) = \epsilon_T \psi(\xi_1, \xi_2)\ . \qquad (5.37)$$

ここで $\epsilon_S, \epsilon_T = \pm$ はそれぞれ，空間方向($\equiv\xi_1$-方向)，(ユークリッド)時間方向($\equiv\xi_2$-方向)の境界条件を指定しており，(ϵ_S, ϵ_T) の選び方のことを 2 次元のスピノル場に対する**スピン構造**と呼ぶ．つまりトーラス上では $2\times2=4$ 通りの異なるスピン構造が存在することになる*2.

経路積分を計算するためにグラスマン数の積分公式

$$\int d\boldsymbol{\xi}\ \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T A \boldsymbol{\xi}\right) = \mathrm{Pfaff}\,(A), \qquad (5.38)$$

$$\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{2N}(\text{グラスマン数})\ , \quad A\ :\ 2N\times 2N\ \text{反対称行列}$$

を思い出そう．ここで記号 $\mathrm{Pfaff}\,(A)$ はいわゆるパッフィアンを表し，反対称行列 A に対し，

$$\mathrm{Pfaff}\,(A) \equiv \frac{1}{N!} \sum_{i_1,\cdots,i_{2N}} \epsilon_{i_1,i_2,\cdots,i_{2N-1},i_{2N}}\, A_{i_1,i_2} \cdots A_{i_{2N-1},i_{2N}} \qquad (5.39)$$

と定義されている($(\mathrm{Pfaff}\,(A))^2 = \det(A)$ である)．公式(5.38)により，形式的にトーラス上のフェルミオン場の分配関数が次のように計算される；

$$\begin{aligned} Z_{(\epsilon_S,\epsilon_T)}(\tau,\bar{\tau}) &\equiv \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\widetilde{\psi}\, e^{-\frac{i}{2\pi}\int_\Sigma d^2w\,\left(\psi\partial_{\bar{w}}\psi - \widetilde{\psi}\partial_w\widetilde{\psi}\right)} \\ &= \left|\mathrm{Pfaff}\left(-\frac{i}{\pi}\partial_{\bar{w}}\right)_{(\epsilon_S,\epsilon_T)}\right|^2. \end{aligned} \qquad (5.40)$$

---

*2 より一般に，ジーナス(種数) g のリーマン面上のフェルミオンに対しては，2^{2g} 個の異なるスピン構造が存在する．またここでは簡単のため，正則部分(左巻き)と反正則部分(右巻き)は同じ境界条件を取ることを仮定する(**対角的スピン構造**と呼ばれる)．本項末のコメント「カイラル・スピン構造」も参照されたい．

ここでパッフィアンの計算は，ボソンの経路積分のときと同様に，フーリエ級数を用いると固有値の無限積に帰着するが，フーリエ・モードが境界条件に依存するのでスピン構造のラベル (ϵ_S, ϵ_T) を添え字として表した．

例としてスピン構造 $(\epsilon_S, \epsilon_T)=(-,-)$ を選んでみよう．すなわち，フェルミオン場 ψ, $\widetilde{\psi}$ は空間・時間方向のどちらかのサイクルを 1 周するとマイナス符号を出す．この境界条件のもとで，フェルミオン場 ψ は座標 ξ_1, ξ_2 に関して

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \sum_{r,s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_{r,s}\, e^{i(r\xi_1+s\xi_2)}$$

と半整数モードのフーリエ級数に展開される（$\widetilde{\psi}$ も同様）．したがって，

$$\mathrm{Pfaff}\left(-\frac{i}{\pi}\partial_{\bar{w}}\right)_{(-,-)} = \prod_{m=1}^{\infty}\prod_{n\in\mathbb{Z}}(-i)\left\{\left(m-\frac{1}{2}\right)\tau-\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\} \quad (5.41)$$

が得られる．この無限積はやはり発散しているので，ζ 関数正則化を使って前と同様に評価する*3；

$$\begin{aligned}\mathrm{Pfaff}\left(-\frac{i}{\pi}\partial_{\bar{w}}\right)_{(-,-)} &\Longrightarrow \prod_{m=1}^{\infty} q^{-\frac{1}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)}\left(1+q^{m-\frac{1}{2}}\right)\\ &\Longrightarrow q^{-\frac{1}{48}}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{m-\frac{1}{2}}\right) \equiv \sqrt{\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

最後の行へ移行するために，公式(5.26)で $\theta=\dfrac{1}{2}$ とおいて得られる公式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \frac{1}{24} \quad (5.43)$$

を用いた．以上よりスピン構造 $(-,-)$ を持つ分配関数 $Z_{(-,-)}(\tau)$ は，

$$Z_{(-,-)}(\tau) = q^{-\frac{1}{48}}\,\bar{q}^{-\frac{1}{48}}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+q^{m-\frac{1}{2}}\right)\left(1+\bar{q}^{m-\frac{1}{2}}\right) = \left|\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right|, \quad (5.44)$$

と求められる．同様に，スピン構造 $(-,+)$ では，

$$Z_{(-,+)}(\tau) = \prod_{m=1}\prod_{n\in\mathbb{Z}}\left|\left(m-\frac{1}{2}\right)\tau-n\right|^2$$

*3 (5.42)の評価には位相因子のあいまいさが付きまとうが，分配関数自身は絶対値の 2 乗となるのでこのあいまいさはない．

$$\Longrightarrow \quad \left| q^{-\frac{1}{48}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1-q^{m-\frac{1}{2}}\right) \right|^2 = \left| \frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)} \right|, \tag{5.45}$$

が得られる．スピン構造 $(+,-)$ では，計算が若干非自明となり，

$$Z_{(+,-)}(\tau) = \prod_{n=0}^{\infty} \left| n+\frac{1}{2} \right|^2 \cdot \prod_{m=1} \prod_{n\in\mathbb{Z}} \left| m\tau - \left(n+\frac{1}{2}\right) \right|^2$$

$$\Longrightarrow \quad 2\cdot \left| q^{\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} (1+q^m) \right|^2 = \left| \frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)} \right| \tag{5.46}$$

と評価される．ここでやはり ζ 関数正則化により，

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left| n+\frac{1}{2} \right|^2 = \left| \prod_{n\in\mathbb{Z}} \left(n+\frac{1}{2}\right) \right| \quad \Longrightarrow \quad \left| -2i \sin \frac{\pi}{2} \right| = 2$$

となることを用いた．また，(5.43)の代わりに，ボソンのときと同様 $\sum_{n=1}^{\infty} n \Longrightarrow \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ を用いている．$(+,+)$ 境界条件では定数関数が許され，$-\frac{i}{\pi}\partial_{\bar{w}}$ がゼロ固有値を持つので(「ゼロ・モードを持つ」と言う)，分配関数は自明にゼロとなる*4.

ボソンと同様に自由フェルミオンの分配関数のこれらの結果は演算子形式で理解することができる．演算子形式では，シリンダー上の共形場理論のヒルベルト空間を考えてトレースを計算することになる；

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \mathrm{Tr}\left[q^{L_0^{\mathrm{cyl}}} \bar{q}^{\bar{L}_0^{\mathrm{cyl}}} \right] \equiv \mathrm{Tr}\left[q^{L_0-\frac{1}{48}} \bar{q}^{\bar{L}_0-\frac{1}{48}} \right]. \tag{5.47}$$

ここで自由フェルミオン系の中心電荷が $c=\frac{1}{2}$ であることを用いた．スピン構造 $(-,*)$ (空間方向に反周期的)は 1.8.3 項で考えた NS セクターに対応し，半整数モードの振動子展開を持つ*5．一方スピン構造 $(+,*)$(空間方向に周期的)は R セクターに対応し整数モードのモード展開を持つ．さらに演算子 $(-1)^F$ を，

*4　上の 3 つの分配関数の表式(5.44)，(5.45)，(5.46)と対称的に書くために，形式的に

$$Z_{(+,+)}(\tau) = \left| \frac{\theta_1(\tau)}{\eta(\tau)} \right| \ (\equiv 0)$$

と書かれることもある．

*5　シリンダー上(w-座標)と z-平面上で考えた場合では，フェルミオン場の「周期的」，「反周期的」境界条件が逆転することに注意．「NS=半整数モード」，「R=整数モード」と覚えるとよい．

$$\{(-1)^F, \psi_n\} = 0, \quad \{(-1)^F, \widetilde{\psi}_n\} = 0, \quad (^\forall n \neq 0), \tag{5.48}$$

によって導入しよう．ゼロ・モード $\psi_0, \tilde{\psi}_0$ に対しては $(-1)^F \equiv \Gamma$ と定義する((1.8.3)項のカイラリティ演算子)．非ゼロ・モードに対しては F を「フェルミオン数演算子」と同定してもよい．フェルミオン場の有限温度系の分配関数 $Z \equiv \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$ を経路積分で評価する際には，虚時間方向に反周期的境界条件を取る必要があり，周期的境界条件に対しては $(-1)^F$ を挿入しないといけないことを思い出そう．

たとえば $(-,-)$ のスピン構造に対する分配関数は，

$$Z_{(-,-)}(\tau, \bar{\tau}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathrm{NS}}}\left[q^{L_0 - \frac{1}{48}}\, \bar{q}^{\tilde{L}_0 - \frac{1}{48}}\right]$$

と計算されるはずである．実際に(1.184)からこのトレースを評価してみよう．$\psi_{-\left(n-\frac{1}{2}\right)}$, $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ がエネルギー $n - \dfrac{1}{2}$ のフェルミオンの生成演算子であることとフェルミ統計に注意して，

$$Z_{(-,-)}(\tau, \bar{\tau}) = \left|q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{n-\frac{1}{2}})\right|^2 \equiv \left|\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right| \tag{5.49}$$

を得る．一方 $(-,+)$ のスピン構造に対しては，$(-1)^F$ の挿入に注意して，

$$\begin{aligned} Z_{(-,+)}(\tau, \bar{\tau}) &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathrm{NS}}}\left[(-1)^F q^{L_0 - \frac{1}{48}}\, \bar{q}^{\tilde{L}_0 - \frac{1}{48}}\right] \\ &= \left|q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{n-\frac{1}{2}})\right|^2 \equiv \left|\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right| \end{aligned} \tag{5.50}$$

となる．R セクターに関しては，真空の 2 重縮退を考慮して

$$Z_{(+,-)}(\tau, \bar{\tau}) = 2\left|q^{\frac{1}{16} - \frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)\right|^2 \equiv \left|\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right| \tag{5.51}$$

と計算される．さらに $(+,+)$ スピン構造については，$(-1)^F$ が R セクターの縮退した真空に Γ として作用することを思い出すと，自明にゼロとなることがわかる．このようにして，期待通りに経路積分の計算結果が再現できた．

上で求めた分配関数のモジュラー不変性を議論しよう．モジュラー変換は一般に場の境界条件を変えてしまうので，各スピン構造ごとの分配関数 $Z_{(\alpha,\beta)}(\tau, \bar{\tau})$ は単独ではモジュラー不変ではない．したがって，単独のスピ

ン構造を考えるだけでは，well-definedな共形場理論とはならず，スピン構造に関する足し上げを考えなければならない．便宜上 $+\to 0$，$-\to 1$ と記号を変えて，スピン構造を自然に $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ の元と同定すると，モジュラー変換 $A\equiv\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$ はスピン構造 (α,β) $(\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_2)$ に対し，行列の掛け算により

$$(\alpha,\beta)\ \longmapsto (\alpha,\beta)A\equiv(a\alpha+c\beta, b\alpha+d\beta)\pmod 2 \tag{5.52}$$

と作用する．実際に付録に与えているテータ関数のモジュラー変換公式(A.20)～(A.23)から，

$$Z_{(\alpha,\beta)}(\tau,\bar{\tau})|_S = Z_{(\beta,\alpha)}(\tau,\bar{\tau}),\quad Z_{(\alpha,\beta)}(\tau,\bar{\tau})|_T = Z_{(\alpha,\alpha+\beta)}(\tau,\bar{\tau}),\quad (\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_2) \tag{5.53}$$

が成立することが示されるので(確かめよ)，すべてのスピン構造について足し上げればモジュラー不変分配関数が得られる；

$$Z(\tau,\bar{\tau})\equiv\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_2} Z_{(\alpha,\beta)}(\tau,\bar{\tau})\equiv\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right|+\left|\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right|+\left|\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right|\right). \tag{5.54}$$

ここで係数の $\dfrac{1}{2}$ は共形次元0の状態(NS真空 $|0\rangle_{\rm NS}$)が縮重度1で現れるようにするために必要である．分配関数(5.54)は，

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = {\rm Tr}_{\mathcal{H}_{\rm NS}\oplus\mathcal{H}_{\rm R}}\left[\frac{1+(-1)^F}{2}q^{L_0-\frac{1}{48}}\bar{q}^{\bar{L}_0-\frac{1}{48}}\right] \tag{5.55}$$

と解釈することができるから，量子状態のヒルベルト空間は，

$$\mathcal{H}_{\text{フェルミオン}} = \frac{1+(-1)^F}{2}(\mathcal{H}_{\rm NS}\oplus\mathcal{H}_{\rm R}) \tag{5.56}$$

と，射影演算子 $\dfrac{1+(-1)^F}{2}$ がかかったものとなる．これが無矛盾な零質量マヨラナ・フェルミオンの理論のヒルベルト空間であり，2次元イジング模型の臨界現象を記述する共形場理論として有名なものである．また，射影 $\dfrac{1+(-1)^F}{2}$ のことを **GSO射影** [40] と呼ぶ．

最後に N 成分の零質量マヨラナ・フェルミオンの場合に拡張しよう．上と全く同様の解析により，モジュラー不変分配関数として，

$$Z_{N\text{-フェルミオン}}(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right|^N + \left|\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right|^N + \left|\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right|^N\right) \tag{5.57}$$

が得られる．これはレベル 1 の $\widehat{SO}(N)$ の対称性を持つ共形場理論の分配関数と等しい$(c=\frac{N}{2})$．実際，フェルミオン演算子 $\psi^i\,(i=1,\cdots,N)$ から $\widehat{SO}(N)$ カレント代数が，

$$J^{[i,j]}(z) \equiv i\psi^i\psi^j, \quad (1 \le i < j \le N)$$

と構成される．また N 成分のディラック・フェルミオンは $2N$ 成分のマヨラナ・フェルミオンの系と等価であり，分配関数は $Z_{2N\text{-フェルミオン}}(\tau,\bar{\tau})$ に等しい．

コメント **カイラル・スピン構造**　ここでは話をやさしくするために，正則部分と反正則部分のスピン構造を等しいとした．しかしながら，原理的には正則部分と反正則部分で独立なスピン構造を選んでもよい(**カイラル・スピン構造**)．カイラル・スピン構造の場合は，対角的なスピン構造の場合と異なり，勝手な成分の数に対してモジュラー不変性が保証されるわけではない．成分ごとには同じスピン構造を取ることを要請すると，一般に成分の数が 8 の倍数であればモジュラー不変な分配関数が構成できる．

応用上重要なのは，8 成分のマヨラナ・フェルミオンの場合である．分配関数を暫定的に，各スピン構造からの寄与に符号をかけて，

$$\begin{aligned} &Z_{\text{カイラル}}(\tau,\bar{\tau}) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta,\tilde{\alpha},\tilde{\beta}=\pm} \epsilon_L(\alpha,\beta)\epsilon_R(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\,\mathrm{Pfaff}\left(-\frac{i}{\pi}\partial_{\bar{w}}\right)_{(\alpha,\beta)} \cdot \mathrm{Pfaff}\left(\frac{i}{\pi}\partial_w\right)_{(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})} \end{aligned} \tag{5.58}$$

としてみよう．今は正則部分と反正則部分で異なるスピン構造を許していることに注意しよう．$\epsilon(\alpha,\beta), \epsilon(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=\pm1$ は，モジュラー不変になるように決定する．また全体の規格化因子 $\frac{1}{4}$ は，正則部分と反正則部分を独立に「カイラル GSO 射影」を取ることに対応している．

パッフィアンの計算は既に与えてある．8 成分であることを考慮すると，成分ごとに同一のスピン構造を仮定しているので，

$$\mathrm{Pfaff}\left(-\frac{i}{\pi}\partial_{\bar w}\right)_{(-,-)}=\left(\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4,\quad \mathrm{Pfaff}\left(-\frac{i}{\pi}\partial_{\bar w}\right)_{(-,+)}=\left(\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4,$$
$$\mathrm{Pfaff}\left(-\frac{i}{\pi}\partial_{\bar w}\right)_{(+,-)}=\left(\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4,\quad \mathrm{Pfaff}\left(-\frac{i}{\pi}\partial_{\bar w}\right)_{(+,+)}=0\left(\equiv\left(\frac{\theta_1(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4\right),$$

となり，反正則部分はこれらの複素共役である．おもしろいことに最も自然と思われる符号因子 $\epsilon_L(\alpha,\beta)=\epsilon_R(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})=1$, $({}^\forall\alpha,\beta,\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$ を採用したのではモジュラー不変にはならない．実はモジュラー不変性を実現する符号の選び方は(全体の因子を除き)一意的で，

$$\epsilon_L(-,-)=1,\quad \epsilon_L(-,+)=\epsilon_L(+,-)=-1$$

である($\epsilon_R(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$ も同じ)．$\epsilon_L(+,+)$，$\epsilon_R(+,+)$ は対応するパッフィアンが消えるので不定である*6．すなわち，モジュラー不変分配関数は次のように書ける；

$$Z_{\text{カイラル}}(\tau)=\frac{1}{4}\left|\left(\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4-\left(\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4-\left(\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4\right|^2. \tag{5.59}$$

このモジュラー不変性は，

$$\mathcal{J}(\tau)\equiv\left(\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4-\left(\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4-\left(\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4 \tag{5.60}$$

とおくとき，

$$\mathcal{J}(\tau)|_T=-e^{\frac{\pi i}{3}}\mathcal{J}(\tau),\quad \mathcal{J}(\tau)|_S=\mathcal{J}(\tau) \tag{5.61}$$

が成り立つことからわかる．付録の公式(A.21)，(A.22)，(A.23)などを用いると，$\epsilon_L(\alpha,\beta)$，$\epsilon_R(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$ の他の選び方($(+,+)$ を除く)はモジュラー不変性を壊してしまうことがわかるので，読者はぜひ確かめてみてほしい．

話はこれで全てではない．実は恒等式(A.29)によって，$\mathcal{J}(\tau)$ は恒等的にゼロである．つまり分配関数(5.59)はゼロとなる．この事実は超弦理論における時空の超対称性と深い関わりを持つ．

最後に $8n$ 成分のカイラルなスピン構造を持つフェルミオンのモジュラー不変分配関数は，5.5 節で扱う運動量格子を用いたモジュラー不変性の議論と密接なつながりを持っていることを指摘しておこう．

---

*6　$\epsilon_L(+,+)$，$\epsilon_R(+,+)$ の選択はトーラス分配関数には影響を与えないが，ラモン(Ramond)真空のカイラリティと関係していて物理的には重要である．超弦理論の立場では，$\epsilon_L(+,+)=\epsilon_R(+,+)=1$ の場合が「タイプ IIB 超弦理論」，$\epsilon_L(+,+)=-\epsilon_R(+,+)=1$ の場合が「タイプ IIA 超弦理論」に対応している．($\epsilon_L(+,+)=\epsilon_R(+,+)=-1$，$\epsilon_L(+,+)=-\epsilon_R(+,+)=-1$ は単にカイラリティの定義に吸収できるので，前の 2 つと本質的に同じ)．

5.2.4 円周上にコンパクト化された自由ボソン場

より非自明な例として，円周上にコンパクト化された自由ボソン場を調べよう．簡単に「コンパクト・ボソン」と呼ばれることも多い(これに対し，5.2.1，5.2.2 項で扱ったものを「非コンパクト・ボソン」と呼ぶ)．円周の半径を R とする．$\sqrt{\alpha'}$ で割って無次元化した半径 $\widehat{R}\equiv R/\sqrt{\alpha'}$ を用いるのも便利である．「コンパクト化」されているとは，同一視

$$X \sim X+2\pi R \tag{5.62}$$

を課すことを意味し，これによりスカラー場 $X(w,\bar{w})$ は一般に多価関数になることが許される．つまり，世界面トーラスのサイクルを 1 周するたびに，場 X は円周に「巻きつく」ことができる．最も一般的な場 X の従うべき境界条件は，既に導入した世界面トーラスの空間・時間方向のサイクルをパラメータ化する座標 ξ_1，ξ_2 (5.13)を用いて

$$\begin{aligned} X(\xi_1+2\pi,\xi_2) &= X(\xi_1,\xi_2)+2\pi wR, \\ X(\xi_1,\xi_2+2\pi) &= X(\xi_1,\xi_2)+2\pi mR, \quad (w,m\in\mathbb{Z}), \end{aligned} \tag{5.63}$$

と表すことができる．ここで整数 w，m は空間・(虚)時間方向の世界面トーラスのサイクルが，円周に何回巻きついているかを表す整数であり，(空間および(虚)時間方向の)**巻きつき数**(winding number)と呼ばれる．このような(ユークリッド計量での)トポロジカル・セクターを持つ物理系の分配関数を経路積分で評価するには，いわゆるインスタントン計算を行う．すなわち，古典解(インスタントン解)の作用の値を求め，そのまわりの量子的なゆらぎ δX を積分する．δX の汎関数積分は前と全く同じ結果を与えるので，

$$\int \mathcal{D}[\delta X]\, e^{-S_X|_{\text{非ゼロ・モード}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha'\tau_2}\,|\eta(\tau)|^2}. \tag{5.64}$$

古典解は巻きつき数ごとに与えられ，明らかに座標 ξ_i に線形でなければならないから，

$$X_{\mathrm{cl}}^{(w,m)} = x+wR\xi_1+mR\xi_2, \tag{5.65}$$

となる．ここで x は定数であり，ゼロ・モード $X_{0,0}$ (=インスタントンのモジ

ュライ)に相当する.「インスタントン作用」は,再び $\partial_w=\dfrac{i}{2\tau_2}(\bar\tau\partial_{\xi_1}+\partial_{\xi_2})$, $\bar\partial_{\bar w}=-\dfrac{i}{2\tau_2}(\tau\partial_{\xi_1}+\partial_{\xi_2})$, $d^2w=\tau_2 d\xi_1 d\xi_2$ を用いて評価すると,

$$S_X[X_{\rm cl}^{(w,m)}]=\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2}|w\tau+m|^2\left(\equiv\frac{\pi\widehat{R}^2}{\tau_2}|w\tau+m|^2\right)$$

となるので,

$$Z(\tau,\bar\tau)|_{\text{ゼロ・モード}}=\sum_{w,m\in\mathbb{Z}}\int dx\, e^{-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2}|w\tau+m|^2}=2\pi R\sum_{w,m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2}|w\tau+m|^2} \tag{5.66}$$

を与える.ゼロ・モード x の積分は今度は有限の体積因子 $2\pi R$ を出すのであらわに残しておく.(5.64),(5.66)を組み合わせると,求める分配関数として

$$\begin{aligned}Z(\tau,\bar\tau)&=\frac{2\pi R}{2\pi\sqrt{\alpha'\tau_2}\,|\eta(\tau)|^2}\sum_{w,m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2}|w\tau+m|^2}\\&\equiv\frac{\widehat{R}}{\sqrt{\tau_2}\,|\eta(\tau)|^2}\sum_{w,m\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi\widehat{R}^2}{\tau_2}|w\tau+m|^2}\end{aligned} \tag{5.67}$$

が得られる.以後,無次元化した半径 $\widehat{R}$ をパラメータに用いて,分配関数(5.67)を $Z_{\widehat{R}}(\tau,\bar\tau)$ と表すことにしよう.

分配関数(5.67)は明白にモジュラー不変である.それを見るために,各巻きつき数 w, m を持つ項(トポロジカル・セクター)に分けてみよう;

$$\begin{aligned}Z_{\widehat{R}}(\tau,\bar\tau)&\equiv\sum_{w,m\in\mathbb{Z}}Z_{\widehat{R},(w,m)}(\tau,\bar\tau),\\Z_{\widehat{R},(w,m)}(\tau,\bar\tau)&\equiv\frac{\widehat{R}}{\sqrt{\tau_2}\,|\eta(\tau)|^2}e^{-\frac{\pi\widehat{R}^2}{\tau_2}|w\tau+m|^2}.\end{aligned} \tag{5.68}$$

このとき,

$$Z_{\widehat{R},(w,m)}(\tau,\bar\tau)|_S=Z_{\widehat{R},(m,-w)}(\tau,\bar\tau),\quad Z_{\widehat{R},(w,m)}(\tau,\bar\tau)|_T=Z_{\widehat{R},(w,m+w)}(\tau,\bar\tau) \tag{5.69}$$

となることがわかる.この関係が物理的に自然であることは,巻きつき数の意味とモジュラー変換の定義より明らかであろう.したがって,全てのトポロジカル・セクターを足し上げた分配関数 $Z_{\widehat{R}}(\tau,\bar\tau)$ は期待通りモジュラー不変となる.

次に演算子形式で考えてみよう．やはりゼロ・モード以外の自由度については，コンパクト化をしない場合と同じである．ゼロ・モード部分は正則部分と反正則部分とで異なる固有値を取ることが許され，

$$\alpha_0 = \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} p_L, \quad \widetilde{\alpha}_0 = \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} p_R, \tag{5.70}$$

によって「ゼロ・モード運動量」p_L, p_R を定義すると，(1.143)，(1.151)のゼロ・モード部分は，

$$X(z) = \frac{1}{2}X_0 - i\frac{\alpha'}{2}p_L \ln z + \cdots, \quad \bar{X}(\bar{z}) = \frac{1}{2}X_0 - i\frac{\alpha'}{2}p_R \ln \bar{z} + \cdots, \tag{5.71}$$

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4}p_L^2 + \cdots, \quad \widetilde{L}_0 = \frac{\alpha'}{4}p_R^2 + \cdots, \tag{5.72}$$

に置き換わる．ここで $p \equiv \frac{1}{2}(p_L + p_R)$ は，X の重心座標 X_0 に共役な運動量とみなされる．したがって，普通の量子力学の議論と同様，固有関数が $X_0 \to X_0 + 2\pi R$ で 1 価であるために，p は $\frac{1}{R}$ の整数倍に量子化されなければならない；

$$p \equiv \frac{1}{2}(p_L + p_R) = \frac{n}{R}, \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{5.73}$$

この量子数 n を**カルーツァ・クライン**(KK; Kaluza-Klein)**運動量**と呼ぶ．一方，空間方向の巻きつき数 w のセクターを考えると，

$$X(e^{2\pi i}z, e^{-2\pi i}\bar{z}) = X(z, \bar{z}) + 2\pi w R$$

を満たさなければならないので，(5.71)より，

$$\frac{\alpha'}{2}(p_L - p_R) = Rw, \tag{5.74}$$

を得る．(5.73)，(5.74)から，

$$p_L = \frac{n}{R} + \frac{R}{\alpha'}w, \quad p_R = \frac{n}{R} - \frac{R}{\alpha'}w, \quad (n, w \in \mathbb{Z}), \tag{5.75}$$

とゼロ・モード運動量が決まる．以上より演算子形式によって分配関数は，

$$Z_{\hat{R}}(\tau, \bar{\tau}) = \mathrm{Tr}\left[q^{L_0 - \frac{1}{24}} \bar{q}^{\tilde{L}_0 - \frac{1}{24}}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2}\sum_{n,w\in\mathbb{Z}} q^{\frac{\alpha'}{4}\left(\frac{n}{R}+\frac{R}{\alpha'}w\right)^2}\bar{q}^{\frac{\alpha'}{4}\left(\frac{n}{R}-\frac{R}{\alpha'}w\right)^2} \\
&= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2}\sum_{n,w\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4}\left(\frac{n}{\widehat{R}}+\widehat{R}w\right)^2}\bar{q}^{\frac{1}{4}\left(\frac{n}{\widehat{R}}-\widehat{R}w\right)^2},
\end{aligned}
\tag{5.76}
$$

と計算される.

経路積分と演算子形式での計算結果(5.67), (5.76)は, 一見異なった表式に見えるが, ポアッソン和公式(A.2)を用いると, 両者が規格化因子も込めて完全に一致していることが示される. この事実から, KK 運動量 n と時間方向の巻きつき数 m が互いに「双対」の関係にあると結論される.

いくつか重要なコメントをしておこう.

コメント **T 双対性** 分配関数(5.76)は, 変換 : $\widehat{R}\to\dfrac{1}{\widehat{R}}$ (すなわち $R\to\dfrac{\alpha'}{R}$) に対し不変であることに注意しよう ;

$$
Z_{\widehat{R}}(\tau,\bar{\tau}) = Z_{1/\widehat{R}}(\tau,\bar{\tau}). \tag{5.77}
$$

もう少し精密に見ると, 変換 : $\widehat{R}\to\dfrac{1}{\widehat{R}}$ によって, KK 運動量 n と巻きつき数 w はその役割を入れ替えていることがわかる. 言い換えれば, 半径 $\widehat{R}$ でコンパクト化されたスカラー場 $X(z,\bar{z})=X(z)+\bar{X}(\bar{z})$ の共形場理論と, 逆数の半径 $\dfrac{1}{\widehat{R}}$ を持つ $\widetilde{X}(z,\bar{z})\equiv X(z)-\bar{X}(\bar{z})$ の共形場理論が等価であるという興味深い結論に導かれる. これは弦理論において **T 双対性**(T-duality)*7 と呼ばれるものであり, 点粒子の理論には見られない弦理論に特有の現象である. ここでは詳しく述べないが, T 双対性は超弦理論に自然な拡張を持ち, 弦の摂動論のレベルでは世界面のジーナスによらず成立する.

コメント **有理共形場理論** 特別な半径 : $\widehat{R}=\sqrt{k}$ $(k\in\mathbb{Z}_{>0})$ を持つ円周を考察しよう. 公式(5.76)により,

$$
\begin{aligned}
Z_{\sqrt{k}}(\tau,\bar{\tau}) &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2}\sum_{n,w\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4k}(n+kw)^2}\bar{q}^{\frac{1}{4k}(n-kw)^2} \\
&= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}}\sum_{n_L,n_R\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4k}(m+2kn_L)^2}\bar{q}^{\frac{1}{4k}(m+2kn_R)^2}
\end{aligned}
$$

---

*7 T 双対性の T は target space を意味する. T 双対性についての包括的なレビューとして, 文献 [41] を挙げておく.

$$= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} |\Theta_{m,k}(\tau)|^2 . \tag{5.78}$$

ここで，$\Theta_{m,k}(\tau)$ はレベル k のテータ関数(2.37)である．上の書き換え(5.78)において，1 行目から 2 行目に移行する際，

$$m+2kn_L = n+kw, \quad m+2kn_R = n-kw, \quad (m \in \mathbb{Z}_k,\ n_L, n_R \in \mathbb{Z})$$

という置き換えをした．$(n,w)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ と $(m,n_L,n_R)\in\mathbb{Z}_{2k}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ が 1 対 1 対応であることは簡単にチェックできる．

さて，

$$\chi_m(\tau) \equiv \frac{\Theta_{m,k}(\tau)}{\eta(\tau)}, \tag{5.79}$$

と定義すると，

$$Z_{\sqrt{k}}(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} |\chi_m(\tau)|^2 \tag{5.80}$$

が成立し，モジュラー変換公式(A.16)，(A.17)，(A.34)，(A.35)により，

$$\chi_m(\tau)|_T = e^{2\pi i\left(h_m - \frac{1}{24}\right)}\chi_m(\tau), \quad h_m \equiv \frac{m^2}{4k}, \tag{5.81}$$

$$\chi_m(\tau)|_S = \sum_{m'\in\mathbb{Z}_{2k}} \frac{e^{-2\pi i \frac{mm'}{2k}}}{\sqrt{2k}}\, \chi_{m'}(\tau). \tag{5.82}$$

が得られる．これらの公式を用いても $Z_{\sqrt{k}}(\tau,\bar{\tau})$ のモジュラー不変性を示すことができるので，読者はぜひ試みられたい．このように，分配関数が**有限個の**モジュラー変換で閉じた構成要素から構成されていることは，**有理共形場理論**(rational conformal field theory)の特徴的な性質であり，実際に $\widehat{R}=\sqrt{k}$ のコンパクト・ボソンは有理共形場理論になることが知られている*8．

簡単な場合を具体的に見てみよう．まず一番簡単な $\widehat{R}=1$ の場合は，

$$Z_1(\tau,\bar{\tau}) = \left|\frac{\Theta_{0,1}(\tau)}{\eta(\tau)}\right|^2 + \left|\frac{\Theta_{1,1}(\tau)}{\eta(\tau)}\right|^2 \equiv |\chi_0(\tau)|^2 + |\chi_1(\tau)|^2 \tag{5.83}$$

となる．ここで，$\chi_0(\tau)$，$\chi_1(\tau)$ はそれぞれ，レベル 1 の $SU(2)$ カレント代数のスピン 0，スピン $\dfrac{1}{2}$ の可積分表現の指標に等しい．既に 4.1 節でも述べたように，$\widehat{R}=1$ のコ

*8 正確に述べると，この理論にはビラソロ代数を拡大したカイラル代数が存在し，$\chi_m(\tau)$ はこのカイラル代数に対する既約表現の指標となっている．一方ビラソロ代数に対しては，$\chi_m(\tau)$ は無限可約表現に対応している．つまりビラソロ代数に関するプライマリー場は無限個存在しており，それらは n, w から決まるゼロ・モード運動量 p_L，p_R を持った頂点作用素(あるいはフォック真空)によって与えられる．一般に，**ビラソロ代数を拡大したカイラル代数に対して**，有限個のプライマリー場で理論が閉じている，というのが有理共形場理論の意味である．

ンパクト・ボソンはレベル 1 の $SU(2)$-WZW 模型と等価である.

次に興味深い例は, $\widehat{R}=\sqrt{2}$ の場合である. このとき分配関数(5.78)は,

$$Z_{\sqrt{2}}(\tau,\bar{\tau})=\sum_{s\in\mathbb{Z}_4}\left|\frac{\Theta_{s,2}(\tau)}{\eta(\tau)}\right|^2=\frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right|^2+\left|\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right|^2+\left|\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right|^2\right\},\quad(5.84)$$

となり, 5.2.3 項で扱った 2 成分の自由マヨラナ・フェルミオン($\cong$ 1 成分自由ディラック・フェルミオン)の分配関数と一致する. この事実は, 共形場理論における「ボソン・フェルミオン対応」の最も簡単な場合に相当している. 具体的な演算子レベルの対応は,

$$i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\partial X(z)=i\psi^1(z)\psi^2(z),\quad(5.85)$$

または,

$$\psi^{\pm}(z)\left(\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1(z)\pm i\psi^2(z))\right)=e^{\pm i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}X(z)}\quad(5.86)$$

と書き表すことができる. ボソン・フェルミオン対応は, 弦理論や数理物理学において多くの応用を持ち, ヤコビのテータ関数 $\theta_i(\tau)$ が級数和と無限積の 2 通りの表し方を持つという事実に起因している. この点については, 付録を参照されたい.

有理共形場理論のモジュラー不変性に関する一般論は 6.2 節で論ずる.

コメント **カーディー公式** これまでの具体例から明らかなように, 一般の CFT におけるトーラス分配関数は,

$$Z(\tau,\bar{\tau})=\mathrm{Tr}\left[q^{L_0-\frac{c}{24}}\bar{q}^{\tilde{L}_0-\frac{c}{24}}\right]\equiv\sum_{h_L,h_R}\rho_L(h_L)\,\rho_R(h_R)\,q^{h_L-\frac{c}{24}}\,\bar{q}^{h_R-\frac{c}{24}},\quad(5.87)$$

と表せる. トレースは理論のヒルベルト空間全体で取るわけであるが, $q,\bar{q}$ についてべき級数展開することにより状態の縮重度が読み取れる. 実は, モジュラー不変性の要請により, **理論のスペクトルの詳細によらず**状態数の漸近的なふるまいを決定することができる. この点について簡単に解説しよう.

統計力学との対応を考えると, モジュライ τ の虚部が逆温度に対応している;

$$\tau_2=\frac{\beta}{2\pi}\equiv\frac{1}{2\pi T}.$$

したがって, $\tau_2\sim+0$ が理論の高温でのふるまいを与えるわけだが, 一般に高温では非常に多くの状態が励起されてしまうため, スペクトルの解析は容易ではない. ところが, モジュラー不変性を用いると, より解析が容易な低温($\tau_2\sim+\infty$)でのふるまいに帰

着させることができるのである．すなわち，$\beta \equiv 2\pi\tau_2 \sim 0$ において，

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = Z\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\bar{\tau}}\right) \sim \left|e^{2\pi i(-\frac{1}{\tau})(-\frac{c}{24})}\right|^2 = e^{\frac{\pi^2}{3}cT}, \tag{5.88}$$

と評価することができる*9．(5.88)の β についての逆ラプラス変換を鞍点法で評価することにより，状態密度を読み取ることができるが，ここではより簡便な方法を用いてみよう．

まず，(5.88)より，自由エネルギーが $F(T) \equiv -T\ln Z \approx -\frac{1}{3}\pi^2 cT^2$ と求められるので，エントロピーは温度 T の関数として

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \approx \frac{2}{3}\pi^2 cT, \tag{5.89}$$

と求められる．一方，簡単のため正則部分と反正則部分のヒルベルト空間が同型であるとすると，エネルギーに相当する共形ウェイトの統計平均については $\left\langle h_L \right\rangle \approx \left\langle h_R \right\rangle \equiv \bar{n}$ と考えてよいので，(5.88)より，

$$E \equiv 2\bar{n} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \approx \frac{\pi^2}{3}cT^2. \tag{5.90}$$

(5.89)と(5.90)より，温度 T を消去してミクロ正準集団のエントロピー $S(\bar{n})$ を求め，さらに $e^{S(\bar{n})} = \rho_L(\bar{n})\rho_R(\bar{n}) \approx \rho(\bar{n})^2$ ($\rho_L = \rho_R \equiv \rho$ とする)の関係を用いると，状態密度の漸近評価式として次を得る，

$$\rho(\bar{n}) \approx 2\pi\sqrt{\frac{c\bar{n}}{6}}, \qquad (\bar{n} \gg 1). \tag{5.91}$$

これは，**カーディー公式** [43] と呼ばれ，広く応用されている．カーディー公式は理論の詳細によらず，中心電荷 c のみで決まっている点が重要である．

5.3 シリンダー分配関数

ここでトーラス分配関数と関係の深い有限サイズのシリンダー上の共形場理論の分配関数を考察してみよう(図 5.3 参照)．弦理論の観点からは，トーラス

---

*9 ここでは，L_0 の最小値を暗黙にゼロと仮定している．通常の「性質のよい」共形場理論は $SL(2,\mathbb{R})$ 不変な真空が規格化可能な状態として存在するので，この仮定は満たされているが，リウビル理論等の「非コンパクト」な理論や，負の共形ウェイトを持つプライマリー状態が存在する非ユニタリな理論においては，ここでの c を次の「有効中心電荷」c_{eff} で置き換える必要がある [42]：

$$c_{\text{eff}} \equiv c - 24h_0,$$

ただし，h_0 はヒルベルト空間に含まれるプライマリー状態の最小の共形ウェイトである．

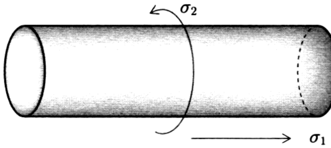


図 5.3 シリンダーの世界面
開弦の見方では σ_2 が虚時間，
閉弦の見方では σ_1 が虚時間
と同定される．

振幅が閉弦の 1 ループであるのに対し，シリンダー振幅は開弦の 1 ループに相当する．話をやさしくするため，5.2.1，5.2.2 項で扱ったような(非コンパクトな) 1 成分の自由な実スカラー場のみを扱う．5.2.3 項や 5.2.4 項のケースがシリンダー分配関数にどのように拡張されるかはよい応用問題なので，読者はぜひ自分で考えてみられたい．

5.3.1 経路積分

まず 5.2.1 項と同様に経路積分で分配関数を考えてみよう．分配関数はやはり(5.11)で表されるが，今度は Σ はシリンダーである．シリンダーのパラメータ表示として，複素座標 $w, \bar{w}$ に対し，

$$w = \sigma_1 - it\sigma_2, \quad \bar{w} = \sigma_1 + it\sigma_2, \quad (\sigma_1 \in [0,\pi],\ \sigma_2 \in [0,2\pi)\,), \tag{5.92}$$

とおくことにする．ここで，$t\,(>0)$ はシリンダーのモジュライであり，it がトーラスのモジュライ τ に類似した役割を果たす．シリンダー Σ を得るには，σ_2 方向に周期的境界条件を課す；

$$X(\sigma_1, \sigma_2 + 2\pi) = X(\sigma_1, \sigma_2). \tag{5.93}$$

一方，シリンダーの境界：$\sigma_1 = 0, \pi$ においては境界条件を設定しなければならない．ここでは代表的な次の 2 つの境界条件を仮定する；

(i) ノイマン(Neumann)境界条件

$$\partial_{\sigma_1} X|_{\sigma_1=0} = \partial_{\sigma_1} X|_{\sigma_1=\pi} = 0, \quad ({}^\forall \sigma_2)$$

(ii) ディリクレ(Dirichlet)境界条件

$$X(\sigma_1=0,\sigma_2)=x_1,\ X(\sigma_1=\pi,\sigma_2)=x_2,\quad (x_1,x_2 \text{ は } \sigma_2 \text{ によらない定数})$$

まずノイマン境界条件を考察しよう．スカラー場 X のフーリエ展開は，

$$X(\sigma_1,\sigma_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_{m,n}\,\varphi_{m,n}(\sigma_1,\sigma_2),\quad (X^*_{m,n}=X_{m,-n}),\tag{5.94}$$

$$\varphi_{m,n}(\sigma_1,\sigma_2)\equiv\begin{cases}\sqrt{2}\,e^{in\sigma_2}\cos(m\sigma_1) & (m\neq 0),\\ e^{in\sigma_2} & (m=0),\end{cases}$$

となり，作用は，

$$\begin{aligned}S_X&=\frac{\pi}{2\alpha' t}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\{(mt)^2+n^2\right\}|X_{m,n}|^2\\&=\frac{\pi}{2\alpha' t}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(mt)^2+n^2\right\}\left(x^2_{m,n}+y^2_{m,n}\right)+\frac{\pi}{2\alpha' t}\sum_{m=1}^{\infty}(mt)^2x^2_{m,0},\end{aligned}\tag{5.95}$$

$$x_{m,n}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_{m,n}+X^*_{m,n}\right),\quad y_{m,n}\equiv\frac{i}{\sqrt{2}}\left(X_{m,n}-X^*_{m,n}\right),\quad (n\neq 0)$$

$$x_{m,0}\equiv X_{m,0}\tag{5.96}$$

と計算される．経路積分測度は前と同様にゼロ・モード $dX_{0,0}\,(\equiv dx_{0,0})$ を除き，

$$\mathcal{D}'X\equiv\prod_{m=0}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}dx_{m,n}dy_{m,n}\prod_{m=1}^{\infty}dx_{m,0},$$

と定義される．分配関数は再びガウス積分の無限積を与え，ζ 関数正則化を用いることにより，次の結果を得る；

$$\begin{aligned}Z=\int\mathcal{D}'X\,e^{-S_X}&=\left[\prod_{m=0}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(mt)^2+n^2}{2\alpha' t}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}m\sqrt{\frac{t}{2\alpha'}}\right]^{-1}\\&\Longrightarrow\frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha' t}\,\eta(it)}.\end{aligned}\tag{5.97}$$

ディリクレ境界条件の場合も考え方は同様であるが，フーリエ展開が異な

る；

$$X(\sigma_1,\sigma_2)=x_1+\frac{x_2-x_1}{\pi}\sigma_1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}X_{m,n}\sqrt{2}\,e^{in\sigma_2}\sin(m\sigma_1),$$
$$(X^*_{m,n}=X_{m,-n})\,. \qquad (5.98)$$

今度は線形項も存在する点に注意して作用を計算すると，

$$S_X=\frac{\pi}{2\alpha' t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(mt)^2+n^2\right\}\left(x^2_{m,n}+y^2_{m,n}\right)+\frac{\pi}{2\alpha' t}\sum_{m=1}^{\infty}(mt)^2x^2_{m,0}$$
$$+\frac{t}{2\pi\alpha'}(x_2-x_1)^2, \qquad (5.99)$$

$$x_{m,n}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_{m,n}+X^*_{m,n}\right),\quad y_{m,n}\equiv\frac{i}{\sqrt{2}}\left(X_{m,n}-X^*_{m,n}\right),\quad (n\neq 0),$$
$$x_{m,0}\equiv X_{m,0}. \qquad (5.100)$$

よって，経路積分の結果次式を得る；

$$Z=\int\mathcal{D}'X\,e^{-S_X}=e^{-\frac{t}{2\pi\alpha'}(x_2-x_1)^2}\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(mt)^2+n^2}{2\alpha' t}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}m\sqrt{\frac{t}{2\alpha'}}\right]^{-1}$$
$$\Longrightarrow\frac{e^{-\frac{t}{2\pi\alpha'}(x_2-x_1)^2}}{\eta(it)}. \qquad (5.101)$$

ノイマン境界条件の分配関数(5.97)との大きな違いは，

（i）　線形項の寄与 $e^{-\frac{t}{2\pi\alpha'}(x_2-x_1)^2}$ の存在，

（ii）　$m=0$ のフーリエ・モードが存在しない．

である．(5.97)と比較したとき，分母に $\sqrt{t}$ に比例する因子が現れないのは(ii)に起因している．この点については次節で別の角度から議論しよう．

5.3.2　演算子形式と境界状態

上の経路積分の計算は，トーラス分配関数と同様，演算子形式でも解釈することが可能である．しかしながら，トーラス分配関数のケースとは異なる興味深い要素がある．モジュラー変換に相当するのは，ここでは σ_1-座標と σ_2-座

標の入れ換えであり，経路積分で計算する限りではこの両者には何ら違いはない．一方演算子形式では，(虚)時間を固定したスライス上に状態のヒルベルト空間を用意し，ハミルトニアンによる時間発展を考察することになるため，時間座標と空間座標の役割が異なり，したがって見かけ上異なった物理量を計算しているように見える．すなわち演算子形式ではシリンダー分配関数に対し次の 2 つの物理的解釈が可能である(図 5.3 参照)；

(1) $\sigma_1 \in [0,\pi]$ を空間座標，σ_2 を虚時間座標とみなし，(5.93)のように周期性(=逆温度) $2\pi t\,(t>0)$ を課す．この場合，開弦の 1 ループ分配関数と同定され，開弦のハミルトニアン $H^{(\mathrm{o})} \equiv L_0^{(\mathrm{o})} - \dfrac{1}{24}$

$$Z^{(\mathrm{o})}(t) \equiv \mathrm{Tr}\left[e^{-2\pi t H^{(\mathrm{o})}}\right] \qquad (5.102)$$

と計算される．

(2) $\sigma_2 \in [0,2\pi)$ を周期的な空間座標，$\sigma_1 \in [0,\pi s]\ (s>0)$ を虚時間座標とみなす．この場合，虚時間 σ_1 に関し，時刻 $\sigma_1=0$ で生成された閉弦が時刻 $\sigma_1=\pi s$ まで伝播して消滅する遷移振幅を計算していると考えることができ，schematic に，

$$Z^{(\mathrm{c})}(s) \equiv \langle B_f | e^{-\pi s H^{(\mathrm{c})}} | B_i \rangle, \qquad (5.103)$$

と書かれる．ここで，状態 $|B_i\rangle$, $|B_f\rangle$ は，閉弦の生成・消滅を表す「始状態」及び「終状態」であり，**境界状態**と呼ばれる．

(1)と(2)を比較した場合，$s=\dfrac{1}{t}$ のもとでこれらの 2 つのシリンダーは共形変換によって同型となることがわかる．したがって上で触れたように，経路積分の立場ではこの両者の振幅は自明に一致するはずであるから，演算子形式でも一致しなければならない．すなわち，共形場理論におけるシリンダー分配関数においては，

$$Z^{(\mathrm{o})}(t) = Z^{(\mathrm{c})}\left(s=\frac{1}{t}\right), \qquad (5.104)$$

が成立するのである．これをシリンダー分配関数における**開弦-閉弦双対性**と

呼び，トーラス分配関数におけるモジュラー不変性に相当する基本的な性質である．

以下，具体的に開弦-閉弦双対性が成立することを調べてみよう．

(1)　開弦1ループ

(i)　ノイマン境界条件

まず $\sigma_1=0,\pi$ でノイマン境界条件：

$$\partial_{\sigma_1} X\big|_{\sigma_1=0} = \partial_\sigma X\big|_{\sigma_1=\pi} = 0, \tag{5.105}$$

を課した場合を考察する．例によって共形写像：$z=e^{iw}=e^{t\sigma_2+i\sigma_1}$，$\bar{z}=e^{-i\bar{w}}=e^{t\sigma_2-i\sigma_1}$ を用いて複素平面に移ると，領域 $\sigma\in[0,\pi)$ は複素上半平面に写像される．ここで，境界条件(5.105)は，

$$[\partial_z X(z,\bar{z})-\partial_{\bar{z}} X(z,\bar{z})]\big|_{\text{実軸}} = 0, \tag{5.106}$$

と同値であるから，これを用いてスカラー場 $X(z,\bar{z})$ を z-平面全体で定義するのが便利である*10．そして，モード展開は，境界条件(5.106)を考慮と，

$$X(z,\bar{z}) = X_0-i\,2\alpha' p_0 \ln|z|+i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}}} \frac{\alpha_n^{(\mathrm{o})}}{n}\left(\frac{1}{z^n}+\frac{1}{\bar{z}^n}\right) \tag{5.107}$$

となることがわかる．境界条件(5.106)のため正則部分と反正則部分のモードは独立ではなく，1種類の振動子を与えている点に注意．同様の理由で，ビラソロ演算子も正則部分と反正則部分は独立ではなく，$L_n^{(\mathrm{o})}$ と表記することにすると，公式 $T=-\dfrac{1}{\alpha'}\partial_z X\partial_z X$ にモード展開(5.107)を代入して，

$$L_0^{(\mathrm{o})} = \alpha' p_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^{(\mathrm{o})}\alpha_n^{(\mathrm{o})} \tag{5.108}$$

を得る．虚時間 τ 方向の並進を表すハミルトニアンは，$L_0^{(\mathrm{o})}-\dfrac{1}{24}$ であるから，求める振幅は，トレース $\mathrm{Tr}\left[q^{L_0^{(\mathrm{o})}-\frac{1}{24}}\right]$ $(q\equiv e^{-2\pi t})$ を計算すればよい．これは5.2.2項のときと同様に実行できる．まず振動子部分は $\left(L_{\mathrm{osc},0}^{(\mathrm{o})}\equiv \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}^{(\mathrm{o})}\alpha_n^{(\mathrm{o})}\right)$，

*10　「2重化のトリック」(doubling trick)と呼ばれる．

$$\mathrm{Tr}\left[q^{L^{(\mathrm{o})}_{\mathrm{osc},0}-\frac{1}{24}}\right]=q^{-\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}=\frac{1}{\eta(it)}. \tag{5.109}$$

さらにゼロ・モード運動量に関しては，(5.35)と同様に，

$$\mathrm{Tr}\left[q^{\alpha' p_0^2}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}dp\,\langle p|p\rangle\,e^{-2\pi t\alpha' p^2}=\frac{1}{2\pi}\,(\mathrm{volume})\times\frac{1}{\sqrt{2\alpha' t}}. \tag{5.110}$$

よって体積因子を落とした後，

$$Z^{(\mathrm{o})}_{NN}(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha' t}\,\eta(it)}, \tag{5.111}$$

を得，期待通り経路積分の結果(5.97)を再現している．

(ii) ディリクレ境界条件

$\sigma_1=0,\pi$ でディリクレ境界条件：

$$X(\sigma_1=0,\tau)\,(\equiv X(z,\bar z)|_{z\in\mathbb{R}_{>0}})=x_1,\quad X(\sigma_1=\pi,\tau)\,(\equiv X(z,\bar z)|_{z\in\mathbb{R}_{<0}})=x_2, \tag{5.112}$$

を取った場合も同様に計算される．まず，境界条件(5.112)に注意すると，スカラー場 $X(z,\bar z)$ のモード展開は，

$$X(z,\bar z)=x_1+\frac{x_2-x_1}{2\pi i}\ln\left(\frac{z}{\bar z}\right)+i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}}}\frac{\alpha^{(\mathrm{o})}_n}{n}\left(\frac{1}{z^n}-\frac{1}{\bar z^n}\right) \tag{5.113}$$

となることがわかる．ディリクレ境界条件によりゼロ・モード運動量が存在せず，$\ln(z/\bar z)\,(=2i\sigma)$ の係数が定数に固定されてしまう点に注意しよう．$L^{(\mathrm{o})}_0$ は $T=-\dfrac{1}{\alpha'}\partial_z X\partial_z X$ に再びモード展開(5.113)を代入することにより，

$$L^{(\mathrm{o})}_0=\frac{(x_2-x_1)^2}{4\pi^2\alpha'}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{(\mathrm{o})}_{-n}\alpha^{(\mathrm{o})}_n \tag{5.114}$$

が得られる．ゼロ・モードの積分が存在しないので，トレースを取るのは容易であり，再び(5.101)と同じ結果：

$$Z_{DD}^{(\mathrm{o})}(t) = \frac{1}{\eta(it)}\, e^{-\frac{t}{2\pi\alpha'}(x_2-x_1)^2}, \tag{5.115}$$

を得る．

(2) 閉弦ツリー振幅：境界状態

さて，今度は，$\sigma'\equiv s\sigma_2$, $\tau'\equiv s\sigma_1\,(s\equiv\frac{1}{t})$と置き直して，$\sigma'\sim\sigma'+2\pi$ を周期的な空間座標，τ' を虚時間座標と考えてみる．つまりシリンダー振幅を，時刻 $\tau'=0$ で閉弦が生成され，$\tau'=\pi s$ で消滅するプロセスを表す閉弦のツリー振幅とみなすのである．対応する複素平面の座標は，$z'\equiv e^{\tau'+i\sigma'}$, $\bar{z}'\equiv e^{\tau'-i\sigma'}$ と定義する．z', $\bar{z}'$ に対する X のモード展開は，正則部分と反正則部分ごとに，以前と同じ(1.143)のように与えられ，独立な 2 種類の振動子 α_n, $\widetilde{\alpha}_n$ が存在することになる(以下，$z', \bar{z}'$ を $z, \bar{z}$ と書き直す)．

(i) ノイマン境界条件

再びノイマン境界条件から考察しよう．今の座標系では，ノイマン境界条件は，$\partial_{\tau'}X|_{\tau'=0}=\partial_{\tau'}X|_{\tau'=\pi s}=0$, あるいは複素平面上では，

$$[z\partial_z X(z,\bar{z})+\bar{z}\partial_{\bar{z}}X(z,\bar{z})]|_{|z|=1,\pi s} = 0,$$

と表される．今度は，境界条件は「時刻」$\tau'=0,\pi s$ における「初期条件」として設定されていることに注意しよう．したがって，場の演算子の方には拘束条件を課さず，境界条件は状態ベクトルに対して与えるのが便利である．このような状態を**境界状態**(boundary state)と呼ぶ．具体的にノイマン条件を満たす境界状態を求めてみよう．満たすべき拘束条件は，

$$[z\partial_z X(z,\bar{z})+\bar{z}\partial_{\bar{z}}X(z,\bar{z})]|_{|z|=1}\,|B;N\rangle = 0, \tag{5.116}$$

あるいは，σ についてのフーリエ展開を考えることにより，

$$\{\alpha_n+\widetilde{\alpha}_{-n}\}\,|B;N\rangle = 0, \quad ({}^\forall n\neq 0), \quad p_0|B;N\rangle = 0, \tag{5.117}$$

と書ける．調和振動子のコヒーレント状態を思い出すと，方程式(5.117)の解は容易に求められる；

$$|B;N\rangle = \mathcal{N}_N \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_{-n}\widetilde{\alpha}_{-n}\right)|p=0\rangle. \qquad (5.118)$$

ここでゼロ・モード運動量 p_0 の固有値 p を持つ(正則および反正則部分の)フォック真空を簡単に $|p\rangle$ と書いた. $\mathcal{N}_N$ は規格化因子であり, 以下で議論するように開弦-閉弦双対性の要請から位相因子を除き定まる. 読者は(5.118)が方程式(5.117)の解となっていることを自分で確かめて欲しい.

同様に「終状態」は, (5.116)に対応して, 拘束条件

$$\langle B;N,\tau'=\pi s|\,[z\partial_z X(z,\bar{z})+\bar{z}\partial_{\bar{z}}X(z,\bar{z})]|_{|z|=\pi s}=0, \qquad (5.119)$$

すなわち,

$$\langle B;N,\tau'=\pi s|\left\{\alpha_n e^{-n\pi s}+\widetilde{\alpha}_{-n}e^{n\pi s}\right\}=0,\ \ ({}^{\forall}n\neq 0),\ \ \langle B;N,\tau'=\pi s|p_0=0, \qquad (5.120)$$

を満たさなければならない. この拘束条件も直接解くことができるが, $X(z,\bar{z})$ は量子力学のハイゼンベルグ演算子に対応していることを思い出すと*11,

$$\langle B;N,\tau'=\pi s|=\langle B;N|e^{-\pi s H^{(c)}}, \qquad (5.121)$$

となることがわかる. ここで, $\langle B;N|$ は $|B;N\rangle$ のエルミート共役であり, あらわに書くと,

$$\langle B;N|=\mathcal{N}_N^*\,\langle p=0|\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n\widetilde{\alpha}_n\right),$$

である($\alpha_n^\dagger=\alpha_{-n}$, $\widetilde{\alpha}_n^\dagger=\widetilde{\alpha}_{-n}$ に注意). また, $H^{(c)}\equiv L_0+\widetilde{L}_0-\frac{1}{12}$ はシリンダー上のハミルトニアンである.

以上より求める振幅は, 境界状態(5.118), (5.121)の内積(「overlap」と呼ばれる)として与えられることとなる;

$$Z_{NN}^{(c)}(s)\equiv\langle B;N,\tau'=\pi s|B;N\rangle\equiv\langle B;N|e^{-\pi s H^{(c)}}|B;N\rangle. \qquad (5.122)$$

---

*11 ローレンツ符号のシリンダー上(つまり実時間)で考えると, ハイゼンベルグ描像における時間に依存する固有状態の公式と同様に, $|B;N,t\rangle=e^{itH^{(c)}}|B;N\rangle$ が成り立つ. したがって, エルミート共役を取ると $\langle B;N,t|=\langle B;N|e^{-itH^{(c)}}$ となり, ウィック回転をすると, $\langle B;N,\tau'=\pi s|=\langle B;N|e^{-\pi s H^{(c)}}$ を得る.

この振幅を直接計算してみよう.

$$\langle 0|e^{-\frac{\alpha_m\tilde{\alpha}_m}{m}}\cdot e^{-\pi s\left(L_0+\tilde{L}_0\right)}\cdot e^{-\frac{\alpha_{-n}\tilde{\alpha}_{-n}}{n}}|0\rangle$$

のタイプの項のうち, ゼロでない寄与を与えるのは $m=n$ のケースに限られるのは明らかである. そして量子力学でおなじみの消滅演算子 α_n, $\tilde{\alpha}_n$ を生成演算子 α_{-n}, $\tilde{\alpha}_{-n}$ の右に持っていく式変形を行えば,

$$\langle 0|e^{-\frac{\alpha_n\tilde{\alpha}_n}{n}}\cdot e^{-\pi s\left(L_0+\tilde{L}_0\right)}\cdot e^{-\frac{\alpha_{-n}\tilde{\alpha}_{-n}}{n}}|0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi kns} = \frac{1}{1-e^{-2\pi sn}},$$

と計算されるので, 次式が得られる;

$$Z_{NN}^{(\mathrm{c})}(s) = \frac{1}{2\pi}\,|\mathcal{N}_N|^2\; e^{-\pi s\frac{1}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-2\pi sn}} \equiv \frac{|\mathcal{N}_N|^2}{2\pi}\frac{1}{\eta(is)}. \tag{5.123}$$

ただし再びゼロ・モード運動量の固有状態の内積に関し,

$$\langle p=0|p=0\rangle = \delta(0) = \frac{1}{2\pi}(\mathrm{volume}),$$

と解釈し, 発散する体積因子を落とした.

「閉弦のツリー振幅」(5.123)が「開弦の1ループ分配関数」(5.111)と一致すべし, というのが, 開弦-閉弦双対性の主張であった. エータ関数のモジュラー変換公式(A.35)より, $\eta(is)=\sqrt{t}\,\eta(it)$ $(t\equiv\frac{1}{s})$ が成り立つので, 境界状態の規格化因子を,

$$\mathcal{N}_N = \left(\frac{1}{2\alpha'}\right)^{1/4}, \tag{5.124}$$

と選べば, 確かに(5.123)は(5.111)と一致している.

(ii) ディリクレ境界条件

ディリクレ境界条件のケースも同様である. まず境界条件: $\partial_{\sigma'}X|_{\tau'=0}=\partial_{\sigma'}X|_{\tau'=\pi s}=0$, より, (5.116), (5.119)に相当する境界状態の拘束条件は,

$$[z\partial_z X(z,\bar{z})-\bar{z}\partial_{\bar{z}}X(z,\bar{z})]|_{|z|=1}\,|B;D\rangle = 0, \tag{5.125}$$

$$\langle B;N,\tau'=\pi s|\,[z\partial_z X(z,\bar{z})-\bar{z}\partial_{\bar{z}}X(z,\bar{z})]|_{|z|=\pi s} = 0, \tag{5.126}$$

と書ける. さらにディリクレ境界条件では重心座標 X_0 の固有値を指定する

ことができ，$\tau'=0, \pi s$ での重心座標をそれぞれ，x_1，x_2 とすると，(5.117)，(5.120) に対応する拘束条件は，

$$\begin{aligned}
&\{\alpha_n - \widetilde{\alpha}_{-n}\}\,|B; D, x_1\rangle = 0, \quad ({}^\forall n \neq 0), \\
&X_0|B; D, x_1\rangle = x_1|B; D, x_1\rangle, \qquad (5.127) \\
&\langle B; D, x_2, \tau' = \pi s|\left\{\alpha_n e^{-n\pi s} - \widetilde{\alpha}_{-n} e^{n\pi s}\right\} = 0, \quad ({}^\forall n \neq 0), \\
&\langle B; D, x_2, \tau' = \pi s|X_0 = \langle B; D, x_2, \tau' = \pi s|x_2, \qquad (5.128)
\end{aligned}$$

となる．ノイマンの場合同様，これらを満たす境界状態は規格化因子を除き一意的に定まる；

$$|B; D, x_1\rangle = \mathcal{N}_D \int dp\, e^{-ipx_1} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n} \widetilde{\alpha}_{-n}\right) |p\rangle, \quad (5.129)$$

$$\begin{aligned}
\langle B; D, x_2, \tau' = \pi s| &= \langle B; D, x_2| e^{-\pi s H^{(c)}}, \\
\langle B; D, x_2| &= \mathcal{N}_D^* \int dp\, e^{ipx_2} \langle p| \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n \widetilde{\alpha}_n\right). \qquad (5.130)
\end{aligned}$$

ノイマン境界状態(5.118)，(5.121)と比較すると，指数関数の肩において生成演算子の 2 次の項の係数の符号が逆になっているが，その理由は明らかであろう．また，X_0 の固有状態を実現するため，平面波の波動関数 $\langle p|x\rangle = e^{-ipx}$ をかけて運動量の固有状態を重ね合わせている．シリンダー振幅はやはり境界状態(5.129)，(5.130)の overlap として与えられる．振動子部分の計算はノイマンの場合と全く同様であるが，今度はゼロ・モード運動量の積分が存在することに注意しよう．したがって，求める振幅は，

$$\begin{aligned}
Z_{DD}^{(c)}(s) &= \langle B; D, x_2| e^{-\pi s H^{(c)}} |B; D, x_1\rangle \\
&= \frac{|\mathcal{N}_D|^2}{\eta(is)} \int dp\, e^{-2\pi s \frac{\alpha'}{4} p^2 + ip\Delta x} \quad (\Delta x \equiv x_2 - x_1) \\
&= \frac{|\mathcal{N}_D|^2}{\eta(is)} \cdot \sqrt{\frac{2}{\alpha' s}}\, e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\pi\alpha' s}}, \qquad (5.131)
\end{aligned}$$

と計算される．最後にモジュラー変換 $\sqrt{s}\,\eta(is) = \eta(it)$ を用い，規格化因子を

$$\mathcal{N}_D = \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/4}, \qquad (5.132)$$

と選べば，期待通り(5.131)は(5.115)と一致している．

コメント **エネルギー・運動量テンソルに対する境界条件** ノイマン境界条件(5.105)(または(5.106))，ディリクレ境界条件(5.112)ともにエネルギー・運動量テンソルに対する次の境界条件を与える；

$$\left[T(z)-\widetilde{T}(\bar{z})\right]\Big|_{\text{実軸}}=0. \tag{5.133}$$

あるいは境界状態に対するビラソロ演算子の拘束条件として表せば，

$$\left(L_n-\widetilde{L}_{-n}\right)|B\rangle=0, \quad ({}^{\forall}n\in\mathbb{Z}), \tag{5.134}$$

と書ける．これらは境界付きの共形場理論における基本的な役割を果たす条件式である．既に述べたように(5.133)のためにエネルギー・運動量テンソルは正則部分と反正則部分が独立ではなく，「2 重化のトリック」によって全複素平面上で定義された**カイラルな**ビラソロ代数を与える．物理的な解釈は以下の通りである．境界付きの共形場理論は**境界を不変に保つ**任意の無限小共形変換に対して理論が不変でなければならず，対応するネーター・カレントはもちろん保存量でなければならない．条件(5.133)(または(5.134))は，これらの流束が境界から「逃げていかない」ことを要請している．

コメント **ノイマン・ディリクレ境界条件** 上で求めた境界状態の(5.118)と(5.129)の無矛盾性をチェックするため，シリンダーの片側でノイマン境界条件，反対側でディリクレ境界条件を取った場合を考察することも有益である．この場合の分配関数は，上で考えた 3 通りの方法，すなわち，

(i) 経路積分と ζ 関数正則化を用いる．

(ii) ノイマン・ディリクレ境界条件のもとで，開弦の座標をモード展開し，$e^{-2\pi tH^{(\mathrm{O})}}$ のトレースを計算する．

(iii) 境界状態(5.118)と(5.130)(または(5.121)と(5.129))の overlap を計算する．

のいずれの方法で計算しても，一致した結果

$$Z_{ND}=\sqrt{\frac{\eta(is)}{\theta_2(is)}}=\sqrt{\frac{\eta(it)}{\theta_4(it)}}$$

となることがわかる．よい練習問題なので，読者はぜひ計算にチャレンジしてみてほしい．

5.4 オービフォルド

共形場理論において比較的簡単に構成でき，非自明かつ有用な模型として知られているものに**オービフォルド**がある [44]．多様体 M に離散群 Γ が作用しているとき，同値関係

$$x \sim gx, \quad ({}^{\exists}g \in \Gamma)$$

で定義される商空間 M/Γ は必ずしも多様体にはならず，「オービフォルド」(orbifold, 軌道体)と呼ばれる．オービフォルド M/Γ はすべての(単位元以外の) Γ の元 g が固定点を持たないときに限り滑らかな多様体となり，一般にはオービフォルド群 Γ のある元の固定点において特異性を示す．M をターゲット空間とする非線形シグマ模型が共形場理論となるとき，オービフォルド M/Γ をターゲット空間とする非線形シグマ模型を構成することが可能であり，「M/Γ に対するオービフォルド共形場理論」と呼ばれる．本節ではオービフォルド共形場理論のモジュラー不変性について簡単な具体例をもとに解説する．

5.4.1 $S^1/\mathbb{Z}_2$ オービフォルド

最も簡単なオービフォルドの模型として，$S^1/\mathbb{Z}_2$ 上の自由ボソン場を考えよう．5.2.4 項で取り上げた半径 R の円周上のコンパクト・ボソンを考え，$\Gamma \equiv \{\sigma, \mathbf{1}\} \cong \mathbb{Z}_2$ の作用を，パリティ変換：

$$\sigma : x \longmapsto -x, \quad \sigma^2 = \mathbf{1}$$

とする．このときオービフォルド $S^1/\mathbb{Z}_2$ は図 5.4 に示すように長さ πR の「線分」となり，オービフォルド特異点(=固定点)は線分の 2 つの端点 x=0, πR である．

さて，オービフォルド上の自由ボソン場のトーラス分配関数を考察してみよう．例によって経路積分と演算子形式の 2 通りで考えてみよう．

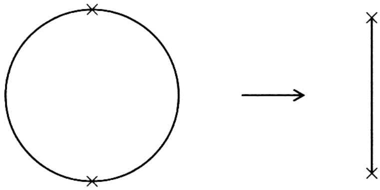


図 5.4 $S^1/\mathbb{Z}_2$ オービフォルド
線分の端点が $\mathbb{Z}_2$ の作用の固定点となる.

(1) 経路積分

経路積分の立場ではこれまで同様，各トポロジカル・セクターごとに古典解を求めてインスタントン計算を実行すればよい．非自明な点は，オービフォルド群 $\mathbb{Z}_2$ の作用による同一視：$X \sim -X$ の存在のために新たなトポロジカル・セクター(=境界条件)が現れる点である．そこで求める分配関数を，

$$Z_{S^1/\mathbb{Z}_2}(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_2} Z_{(\alpha,\beta)}(\tau,\bar{\tau}), \tag{5.135}$$

と表してみよう．ここで，$\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_2$ はトーラスの空間及び時間方向の境界条件をラベルしており，前と同じ座標 ξ_1,ξ_2 (5.13)を用いて，

$$\begin{cases} X(\xi_1+2\pi,\xi_2) = \alpha X(\xi_1,\xi_2)+2\pi wR, \\ X(\xi_1,\xi_2+2\pi) = \beta X(\xi_1,\xi_2)+2\pi mR \qquad ({}^\forall w,m\in\mathbb{Z}), \end{cases} \tag{5.136}$$

と定義されるものとする．全体の $\frac{1}{2}$ の因子は同一視 $\sigma: x\mapsto -x$ に起因しており，経路積分する場の配位の数え過ぎを避けるためである．

以下，具体的に各トポロジカル・セクターの分配関数 $Z_{(\alpha,\beta)}(\tau,\bar{\tau})$ を計算してみよう．なお，本節では記号を簡単にするため $\alpha'=1$ とおく．

まず $(+,+)$ セクター(untwisted sector)の計算は 5.2.4 項と全く同じであり，

$$Z_{(+,+)}(\tau,\bar{\tau}) = \frac{R}{\sqrt{\tau_2}\,|\eta(\tau)|^2}\sum_{w,m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi R^2}{\tau_2}|w\tau+m|^2} \equiv Z_R(\tau,\bar{\tau}), \tag{5.137}$$

となる．

次に，twisted sector：$(\alpha,\beta)=(+,-),\ (-,+),\ (-,-)$ のセクターにおいては，巻きつき数を持ったインスタントン解は存在できず，自明な 2 つの解：$X(\xi_1,\xi_2)\equiv 0$，$X(\xi_1,\xi_2)\equiv\pi R$ のまわりの量子的ゆらぎのガウス積分を行うこ

ととなる．ここで重心座標はオービフォルドの固定点 $x=0, \pi R$ 以外の値を取ることができない(理由を考えよ)．twisted sector の経路積分が，固定点のまわりのゆらぎの寄与のみからなる点がオービフォルドの特徴であり，したがって経路積分にはゼロ・モードの積分は登場しない．ガウス積分はやはり固有値の無限積に帰着し(ボース統計とフェルミ統計の違いはあるが)，5.2.3 項で扱ったフェルミオンの行列式の計算と同様に ζ 関数正則化を用いて評価できる．詳細は読者にまかせて結果のみ述べると，

$$Z_{(+,-)}(\tau,\bar{\tau}) = 2\cdot\left[\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-1}\cdot\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\tau_2}\left|m\tau+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|^2\right]^{-1}$$
$$\Longrightarrow\quad 2\left|\frac{\eta(\tau)}{\theta_2(\tau)}\right|, \tag{5.138}$$

$$Z_{(-,+)}(\tau,\bar{\tau}) = 2\cdot\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\tau_2}\left|\left(m-\frac{1}{2}\right)\tau+n\right|^2\right]^{-1}$$
$$\Longrightarrow\quad 2\left|\frac{\eta(\tau)}{\theta_4(\tau)}\right|, \tag{5.139}$$

$$Z_{(-,-)}(\tau,\bar{\tau}) = 2\cdot\left[\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\tau_2}\left|\left(m-\frac{1}{2}\right)\tau+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|^2\right]^{-1}$$
$$\Longrightarrow\quad 2\left|\frac{\eta(\tau)}{\theta_3(\tau)}\right|, \tag{5.140}$$

と計算される．ここで，2 倍の因子がかかるのは，2 つの固定点 $x=0, \pi R$ から独立な寄与があるからである．

(5.137), (5.138), (5.139), (5.140) を (5.135) に代入することによって，求める分配関数として，以下が得られる．

$$Z_{S^1/\mathbb{Z}_2}(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{2}Z_R(\tau,\bar{\tau})+\left|\frac{\eta(\tau)}{\theta_2(\tau)}\right|+\left|\frac{\eta(\tau)}{\theta_4(\tau)}\right|+\left|\frac{\eta(\tau)}{\theta_3(\tau)}\right|, \tag{5.141}$$

分配関数 $Z_{S^1/\mathbb{Z}_2}(\tau,\bar{\tau})$ のモジュラー不変性は明らかであろう．フェルミオンのスピン構造のときと同様，各 twisted sector の分配関数 $Z_{(\alpha,\beta)}(\tau,\bar{\tau})$ が，

$$Z_{(\alpha,\beta)}(\tau,\bar{\tau})\big|_S = Z_{(\beta,\alpha)}(\tau,\bar{\tau}),\qquad Z_{(\alpha,\beta)}(\tau,\bar{\tau})\big|_T = Z_{(\alpha,\alpha+\beta)}(\tau,\bar{\tau}),$$

を満たす点が重要である．

(2) 演算子形式

演算子形式ではオービフォルドはどのように考えればよいであろうか？ まず量子力学を復習すると，配位空間に σ による同一視：$x\sim -x$ を導入するということは，波動関数が σ の作用に対して(位相因子を除き)不変でなければならないことを意味する．したがって，分配関数を演算子形式で計算するにはトレースの中に σ に対する不変性を課す射影演算子(オービフォルド射影；orbifold projection)；$P_\sigma\equiv\dfrac{1+\sigma}{2}$ を挿入してやればよい．さらに，ヒルベルト空間に twisted sector を加えて拡大する必要がある．具体的には，境界条件；

$$X(e^{2\pi i}z, e^{-2\pi i}\bar{z}) = \sigma\cdot X(z,\bar{z})+2\pi wR \equiv -X(z,\bar{z})+2\pi wR, \quad (w\in\mathbb{Z}) \tag{5.142}$$

を満たす自由スカラー場のフーリエ展開を考えるため，半整数モードの振動子からなるフォック空間が twisted sector のヒルベルト空間となる．経路積分の場合同様，重心座標は固定点 $X_0=0$ ($w=0$ の場合)，または $X_0=\pi R$ ($w=1$ の場合)に固定されてしまい，さらに半整数モードとなるため，ゼロ・モード運動量は存在しない．

以上の考察より，求める分配関数は，

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{(+)}}\left[\frac{1+\sigma}{2}\, q^{L_0-\frac{1}{24}}\,\bar{q}^{\tilde{L}_0-\frac{1}{24}}\right]+\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{(-)}}\left[\frac{1+\sigma}{2}\, q^{L_0-\frac{1}{24}}\,\bar{q}^{\tilde{L}_0-\frac{1}{24}}\right], \tag{5.143}$$

と計算されると考えられる．$\mathcal{H}^{(+)}$，$\mathcal{H}^{(-)}$ はそれぞれ untwisted sector, twisted sector のヒルベルト空間を表す．

まず $\mathcal{H}^{(+)}$ 上のトレースを考えよう．σ の挿入がない項は，もちろん以前計算した分配関数(5.76)(したがって $Z_{(+,+)}(\tau,\bar{\tau})$ (5.137))と一致する；

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{(+)}}\left[q^{L_0-\frac{1}{24}}\,\bar{q}^{\tilde{L}_0-\frac{1}{24}}\right] &= \frac{1}{|\eta(\tau)|^2}\sum_{n,w\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4}\left(\frac{n}{R}+Rw\right)^2}\bar{q}^{\frac{1}{4}\left(\frac{n}{R}-Rw\right)^2} \\ &\equiv Z_{(+,+)}(\tau,\bar{\tau}).\end{aligned} \tag{5.144}$$

トレースに σ を挿入した場合，寄与を与えるのは，$p_L=p_R=0$ となる状態のみ

であり，振動子 α_{-n}, $\widetilde{\alpha}_{-n'}$ を符号付きで数えることになるので，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{(+)}}\left[\sigma\, q^{L_0-\frac{1}{24}}\,\bar{q}^{\widetilde{L}_0-\frac{1}{24}}\right] &= q^{-\frac{1}{24}}\,\bar{q}^{-\frac{1}{24}}\cdot\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)\prod_{n'=1}^{\infty}(1+\bar{q}^{n'})}\\ &= 2\left|\frac{\eta(\eta)}{\theta_2(\tau)}\right| \equiv Z_{(+,-)}(\tau,\bar{\tau}). \qquad (5.145)\end{aligned}$$

次に twisted sector $\mathcal{H}^{(-)}$ を考えよう．上で述べたように，振動子は半整数モードとなり，公式(5.26)より零点エネルギーは，

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad\Longrightarrow\quad -\frac{1}{24}+\frac{1}{16}=\frac{1}{48},$$

となる．言い換えれば，twist された境界条件のために，真空のエネルギーが untwisted sector に比べ，$\Delta E=\dfrac{1}{16}$ だけ高くなっている．さらにフォック真空は固定点 $X_0=0$, πR に対応して 2 重に縮退していることに注意すると，トレースの計算は以下のようになる；

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{(-)}}\left[q^{L_0-\frac{1}{24}}\,\bar{q}^{\widetilde{L}_0-\frac{1}{24}}\right] &= 2\cdot q^{\frac{1}{48}}\,\bar{q}^{\frac{1}{48}}\cdot\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-\frac{1}{2}})\prod_{n'=1}^{\infty}(1-\bar{q}^{n'-\frac{1}{2}})}\\ &= 2\left|\frac{\eta(\eta)}{\theta_4(\tau)}\right| \equiv Z_{(-,+)}(\tau,\bar{\tau}), \qquad (5.146)\\ \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{(-)}}\left[\sigma\, q^{L_0-\frac{1}{24}}\,\bar{q}^{\widetilde{L}_0-\frac{1}{24}}\right] &= 2\cdot q^{\frac{1}{48}}\,\bar{q}^{\frac{1}{48}}\cdot\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-\frac{1}{2}})\prod_{n'=1}^{\infty}(1+\bar{q}^{n'-\frac{1}{2}})}\\ &= 2\left|\frac{\eta(\eta)}{\theta_3(\tau)}\right| \equiv Z_{(-,-)}(\tau,\bar{\tau}). \qquad (5.147)\end{aligned}$$

これらの計算より，期待通り(5.143)は(5.141)と一致していることがわかる．

コメント　**twisted sector の意味について**　経路積分と演算子形式を比較すると，「twisted sector」の意味が少し異なっていることに気付くであろう．分配関数 $Z_{(+,-)}(\tau,\bar{\tau})$ は，経路積分の立場では虚時間 ξ_2-方向に twist された境界条件を取ることを意味するが，演算子形式では untwisted sector のヒルベルト空間 $\mathcal{H}^{(+)}$ 上のトレースに演算子 σ を挿入することを意味する．読者は経路積分の定義に立

ち戻り，この両者が等価である理由を考察して欲しい．同様の事実はフェルミオンのスピン構造を考えた際にも現れている．

5.4.2 一般のオービフォルド

上記の構成を一般のオービフォルド M/Γ の場合に拡張してみよう．少々抽象的になるが，**非線形シグマ模型に限らず**一般の共形場理論(再び M と表す)が離散群 Γ で定義される対称性を持つとき，M の「オービフォルド共形場理論」を構成することができる．話をやさしくするため Γ は有限群と仮定する．今，$\Phi(w,\bar{w})\equiv\Phi(\xi_1,\xi_2)$ $(w\equiv\xi_1-\tau\xi_2)$ をトーラス上の共形場理論 M の基本的な共形場とし，Γ の作用が定義されているものとする； $g:\Phi\longmapsto g{\cdot}\Phi$．このとき Γ の 2 つの**可換**な元のペア (g,h) に対し，(5.136) と同様に twisted sector;

$$\begin{cases} \Phi(\xi_1+2\pi,\xi_2)=g{\cdot}\Phi(\xi_1,\xi_2), \\ \Phi(\xi_1,\xi_2+2\pi)=h{\cdot}\Phi(\xi_1,\xi_2), \end{cases} \tag{5.148}$$

が定義され，この境界条件を満たす場の経路積分によって，分配関数 $Z_{(g,h)}(\tau,\bar{\tau})$ が定義される．ここでトーラス上で ξ_1，ξ_2-方向の並進は可換であるから，$gh\neq hg$ である場合は境界条件は矛盾したものとなり，経路積分に寄与しない．演算子形式では次のように考えればよい．g-twisted sector のヒルベルト空間を $\mathcal{H}_g$ とするとき，演算子形式では

$$Z_{(g,h)}(\tau,\bar{\tau})=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_g}\left[h\,q^{L_0-\frac{c}{24}}\,\bar{q}^{\tilde{L}_0-\frac{c}{24}}\right], \tag{5.149}$$

と解釈されるが，一般に，境界条件 $\Phi(e^{2\pi i}z,e^{-2\pi i}\bar{z})=g{\cdot}\Phi(z,\bar{z})$ を満たす場 Φ に対して，${}^h\Phi\equiv h{\cdot}\Phi$ とおくとき，

$${}^h\Phi(e^{2\pi i}z,e^{-2\pi i}\bar{z})=hgh^{-1}{\cdot}{}^h\Phi(z,\bar{z})$$

が成り立つから，

$$h\ :\ \mathcal{H}_g\ \overset{\cong}{\longrightarrow}\ \mathcal{H}_{hgh^{-1}},$$

であることがわかる．したがって，$hgh^{-1}\neq g$ の場合は h を挿入したトレース (5.149) は自明にゼロとなる．

以上の考察より，一般のオービフォルド M/Γ のトーラス分配関数は次のように書かれることがわかる；

$$
\begin{aligned}
Z_{M/\Gamma}(\tau,\bar{\tau}) &= \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\substack{g,h\in\Gamma\\ gh=hg}} Z_{(g,h)}(\tau,\bar{\tau})\\
&= \sum_{[g]\,:\,\text{conj. class}} \frac{1}{|C_g|}\sum_{h\in C_g} Z_{(g,h)}(\tau,\bar{\tau}). \qquad (5.150)
\end{aligned}
$$

ただし，ここで $[g]\equiv\{hgh^{-1} : {}^{\forall}h\in\Gamma\}$ は g の共役類(conjugacy class)であり，「g の中心化群(centralizer)」C_g を，

$$
C_g \equiv \{g'\in\Gamma \,:\, g'g=gg'\}
$$

と定義した．(5.150)の 1 行目と 2 行目の等価性は，自明な関係式

$$
|\Gamma| = |[g]|\cdot|C_g|\,,
$$

と，

$$
\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_g}\left[h\,q^{L_0-\frac{c}{24}}\,\bar{q}^{\widetilde{L}_0-\frac{c}{24}}\right] = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{aga^{-1}}}\left[aha^{-1}\,q^{L_0-\frac{c}{24}}\,\bar{q}^{\widetilde{L}_0-\frac{c}{24}}\right], \quad ({}^{\forall}a\in\Gamma),
$$

による．ここで，Γ の作用は共形場理論の対称性，すなわち L_0, $\widetilde{L}_0$ と可換であることに注意しよう．(5.150)の 2 行目によると，オービフォルド M/Γ のヒルベルト空間は，Γ の各共役類に付随した部分空間に直和分解され，おのおのの部分空間において中心加群 C_g によって「ゲージ化」されると解釈される．

5.5　運動量格子とモジュラー不変性

本節では高次元トーラスにコンパクト化された自由ボソン場を考察する．一般的なモジュラー不変性に対し，運動量空間における**正定値とは限らない**格子(ローレンツ格子)を用いた美しい議論が存在し，超弦理論へも重要な応用を持つ [45, 46]．記号を簡単にするため，本節では $\alpha'=1$ とおく(つまり 5.2.4 項において $\widehat{R}=R$ と思ってよい)．

5.5.1 対角型トーラス

ウォーミングアップとして，「対角型トーラス」

$$T^N(R_1,\cdots,R_d) \cong S^1_{R_1}\times\cdots\times S^1_{R_d}$$

を考えよう．分配関数はもちろん 5.2.4 項で与えた(5.67)の積となる；

$$Z(\tau,\bar\tau) = \prod_{i=1}^{d} Z_{R_i}(\tau,\bar\tau). \tag{5.151}$$

あるいは成分ごとにポアッソン和公式(A.2)を用いることにより，

$$Z(\tau,\bar\tau) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^{2d}} \sum_{n_i, w^i\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_L^2}\bar q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_R^2}, \tag{5.152}$$

$$\boldsymbol{p}_L = (p_{L,1},\cdots,p_{L,d}),\quad \boldsymbol{p}_R = (p_{R,1},\cdots,p_{R,d}),$$

$$p_{L,i} = \frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{n_i}{R_i}+R_iw^i\right),\quad p_{R,i} = \frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{n_i}{R_i}-R_iw^i\right),$$

$$\boldsymbol{p}_L^2 = \sum_{i=1}^{d} p_{L,i}^2,\quad \boldsymbol{p}_R^2 = \sum_{i=1}^{d} p_{R,i}^2,$$

と書くことができる．

この結果を次のように解釈するのが便利である．まずユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ とその双対空間 $(\mathbb{R}^d)^*$ の直和 $V\equiv\mathbb{R}^d\oplus(\mathbb{R}^d)^*$ を用意し，$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1,\cdots,d}$ を $\mathbb{R}^d$ の正規直交基底，$\{\boldsymbol{e}^{*i}\}_{i=1,\cdots,d}$ をその双対基底とする．そして，n_i，w^i を V における格子上の点

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{d}(n_i\boldsymbol{a}^{*i}+w^i\boldsymbol{a}_i),\quad \boldsymbol{a}_i = R_i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{a}^{*i} = \frac{1}{R_i}\boldsymbol{e}^{*i} \tag{5.153}$$

に対応させる．V におけるユークリッド内積を，

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}^{*i},\boldsymbol{e}^{*j}) = \delta_{ij},\quad (\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}^{*j}) = 0, \tag{5.154}$$

によって導入しよう．さらに，符号 (d,d) を持つ内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を，

$$\langle\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle = \langle\boldsymbol{e}^{*i},\boldsymbol{e}^{*j}\rangle = 0,\quad \langle\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}^{*j}\rangle = \delta_{ij} \tag{5.155}$$

と定義する．$\boldsymbol{f}_{L,i}\equiv\frac{1}{\sqrt2}(\boldsymbol{e}^{*i}+\boldsymbol{e}_i)$，$\boldsymbol{f}_{R,i}\equiv\frac{1}{\sqrt2}(\boldsymbol{e}^{*i}-\boldsymbol{e}_i)$ は内積 $(\ ,\ )$，$\langle\ ,\ \rangle$ 双方に対し正規直交となる；

$$(\boldsymbol{f}_{L,i}, \boldsymbol{f}_{L,j}) = (\boldsymbol{f}_{R,i}, \boldsymbol{f}_{R,j}) = \delta_{ij}, \quad (\boldsymbol{f}_{L,i}, \boldsymbol{f}_{R,j}) = 0,$$
$$\langle \boldsymbol{f}_{L,i}, \boldsymbol{f}_{L,j} \rangle = -\langle \boldsymbol{f}_{R,i}, \boldsymbol{f}_{R,j} \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \boldsymbol{f}_{L,i}, \boldsymbol{f}_{R,j} \rangle = 0. \tag{5.156}$$

そして容易に確かめられるように,

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{d} (p_{L,i}\boldsymbol{f}_{L,i} + p_{R,i}\boldsymbol{f}_{R,i}) \equiv \boldsymbol{p}_L + \boldsymbol{p}_R, \tag{5.157}$$
$$\boldsymbol{p}_L^2 = \frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}) + \langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle\right\}, \quad \boldsymbol{p}_R^2 = \frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}) - \langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle\right\} \tag{5.158}$$

が成立している.

(5.153)で定義される運動量格子 Λ は, 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対して次の性質を持っていることに注意しよう；

偶格子(even integral lattice)

$$\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle \in 2\mathbb{Z} \quad ({}^{\forall}\boldsymbol{p} \in \Lambda). \tag{5.159}$$

自己双対格子(self-dual lattice)

$$\Lambda^* \equiv \{\boldsymbol{u} \in V \ :\ \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle \in \mathbb{Z},\ {}^{\forall}\boldsymbol{v} \in \Lambda\} = \Lambda. \tag{5.160}$$

すなわち, 双対格子 Λ^* は Λ 自身と一致する*12.

そして, 分配関数(5.152)は,

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^{2d}} \sum_{\boldsymbol{p}\in\Lambda} q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_L^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_R^2}, \tag{5.161}$$

と運動量格子 Λ 上の和として表すことができる. 実はここで述べた格子の 2 つの性質は, (5.161)がモジュラー不変であるための必要十分条件となっている. この点を次に議論しよう.

---

*12　自己双対格子は, vol(Λ)=1 となるので,「ユニモジュラー」と呼ばれることもある.

5.5.2 ナライン格子

本項では N 次元の実ベクトル空間 V とその上の符号 (r,s) $(r+s=N)$ を持つ内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から出発する．$\{\boldsymbol{f}_{L,i},\boldsymbol{f}_{R,j}\}_{i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots,s}$ をひとつの正規直交基底とする；

$$\langle\boldsymbol{f}_{L,i},\boldsymbol{f}_{L,j}\rangle=-\langle\boldsymbol{f}_{R,i},\boldsymbol{f}_{R,j}\rangle=\delta_{ij},\quad \langle\boldsymbol{f}_{L,i},\boldsymbol{f}_{R,j}\rangle=0. \tag{5.162}$$

N 次元の格子 $\Lambda\subset V$ に対し，次の関数を定義しよう(「ジーゲル・ナライン(Siegel-Narain)のテータ関数」と呼ばれる)．

$$\Theta_\Lambda(\tau,\bar\tau)\equiv\sum_{\boldsymbol{p}\in\Lambda}q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_L^2}\bar q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_R^2}. \tag{5.163}$$

$$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{r}p_{L,i}\boldsymbol{f}_{L,i}+\sum_{j=1}^{s}p_{R,j}\boldsymbol{f}_{R,j}\equiv\boldsymbol{p}_L+\boldsymbol{p}_R,$$

$$\boldsymbol{p}_L^2\equiv\sum_{i=1}^{r}p_{L,i}^2,\quad \boldsymbol{p}_R^2\equiv\sum_{j=1}^{s}p_{R,j}^2. \tag{5.164}$$

以下，格子 Λ は偶格子であると仮定する．すなわち，

$$\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle\equiv\boldsymbol{p}_L^2-\boldsymbol{p}_R^2\in2\mathbb{Z},\quad ({}^\forall\boldsymbol{p}\in\Lambda)$$

が成立しているとする．関数(5.163)のモジュラー変換は次のように評価される．まず Λ が偶格子であることから

$$\Theta_\Lambda(\tau,\bar\tau)|_T=\sum_{\boldsymbol{p}\in\Lambda}e^{i\pi\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle}q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_L^2}\bar q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_R^2}=\Theta_\Lambda(\tau,\bar\tau) \tag{5.165}$$

と T 不変であることがわかる．逆に $\Theta_\Lambda(\tau,\bar\tau)$ が T 不変であるためには，Λ が偶格子でなければならないことも明らかであろう．S 変換に関しては，ポアッソンの和公式(A.3)を用いて，

$$\Theta_\Lambda(\tau,\bar\tau)|_S=\frac{(-i\tau)^{\frac{r}{2}}(i\bar\tau)^{\frac{s}{2}}}{\mathrm{vol}(\Lambda)}\Theta_{\Lambda^*}(\tau,\bar\tau), \tag{5.166}$$

となることがわかる．ここで Λ^* は，Λ の双対格子である．したがって，分配関数

$$Z_\Lambda(\tau,\bar\tau)\equiv\frac{\Theta_\Lambda(\tau,\bar\tau)}{\eta(\tau)^r\overline{\eta(\tau)^s}} \tag{5.167}$$

が S 不変となるためには，Λ が自己双対格子：$\Lambda^*=\Lambda$ でなければならない．さらに，$\mathrm{vol}(\Lambda^*)=\mathrm{vol}(\Lambda)^{-1}$ より，自己双対格子 Λ に対しては $\mathrm{vol}(\Lambda)=1$ が成り立ち，また $\eta(\tau)$ のモジュラー変換公式 $\eta(\tau)|_S=(-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$ を思い出すと，Λ の自己双対性は $Z_\Lambda(\tau,\bar{\tau})$ が S 不変であるための十分条件にもなっていることがわかる．特に $r\equiv s \pmod{24}$ であれば分配関数 $Z_\Lambda(\tau,\bar{\tau})$ は完全にモジュラー不変である．

一般に自己双対な偶格子を**ナライン格子**(Narain lattice)と呼ぶ．符号 (r,s) のナライン格子は $r-s\equiv 0 \pmod 8$ の場合にのみ存在することが知られている．重要な例をいくつか述べておこう；

例 1　$r=s=d$

この場合，符号 (d,d) のナライン格子 Λ に対して定義された分配関数

$$Z_\Lambda(\tau,\bar{\tau}) = \frac{\Theta_\Lambda(\tau,\bar{\tau})}{|\eta(\tau)|^{2d}} \tag{5.168}$$

はモジュラー不変であり，d 次元トーラスにコンパクト化された自由ボソン場の最も一般的なモジュラー不変分配関数を与える．実際，d 次元トーラスをターゲット空間とする非線形シグマ模型を最も一般的な背景場で考えると，世界面上の作用は次のように書ける；

$$S_X = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^2w\left\{G_{ij}\partial_\alpha X^i\partial_\alpha X^j + i\epsilon^{\alpha\beta}B_{ij}\partial_\alpha X^i\partial_\beta X^j\right\}. \tag{5.169}$$

ここで，G_{ij} はターゲット空間の計量，また反対称テンソル場 B_{ij} は**カルプ・ラモン場**(Kalb-Ramond field)と呼ばれ，d 次元トーラスに対してはそれぞれ定数である．計算は少々煩雑であるが，5.2.4 項や 5.5.1 項と同様に経路積分とポアッソン和公式を駆使することにより，次の分配関数が得られる；

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^{2d}}\sum_{n_i,w^i\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_L^2}\bar{q}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_R^2}, \tag{5.170}$$

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{d}\left\{(n_i - B_{ij}w^j)\boldsymbol{a}^{*i} + w^i\boldsymbol{a}_i\right\}, \tag{5.171}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_L^2 &= \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})+\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{G^{ij}(n_i-B_{ir}w^r)(n_j-B_{js}w^s)+G_{ij}w^iw^j+2n_iw^i\right\},\end{aligned} \tag{5.172}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_R^2 &= \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})-\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{G^{ij}(n_i-B_{ir}w^r)(n_j-B_{js}w^s)+G_{ij}w^iw^j-2n_iw^i\right\}.\end{aligned} \tag{5.173}$$

ここで，$V\equiv\mathbb{R}^d\oplus(\mathbb{R}^d)^*$ における正定値及び符号 (d,d) を持つ内積 $(\ ,\ )$，$\langle\ ,\ \rangle$ は，5.5.1 項におけるものと同じであり，基底 $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}^{*i}$ は，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=G_{ij},\quad (\boldsymbol{a}^{*i},\boldsymbol{a}^{*j})=G^{ij},\quad (\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}^{*j})=0,\\ &\langle\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j\rangle=\langle\boldsymbol{a}^{*i},\boldsymbol{a}^{*j}\rangle=0,\quad \langle\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}^{*j}\rangle=\delta_{ij},\end{aligned} \tag{5.174}$$

(G^{ij} は G_{ij} の逆行列)を満たす．すなわち分配関数(5.170)は，運動量格子

$$\Lambda=\sum_{i=1}^{d}\mathbb{Z}\boldsymbol{a}^{*i}+\sum_{i=1}^{d}\mathbb{Z}(\boldsymbol{a}_i+B_{ij}\boldsymbol{a}^{*j}) \tag{5.175}$$

上の足し上げと解釈することができ，Λ がナライン格子となっていることは容易に確かめられる．詳細は割愛するが，一般に符号 (d,d) を持つナライン格子は(5.175)の形に表せることが証明でき，こうしたナライン格子全体は，商空間

$$\frac{O(d,d)}{O(d)\times O(d)} \tag{5.176}$$

でパラメータ化される．自由度の数を確認してみよう．商空間(5.176)の次元は，

$$\dim\left[\frac{O(d,d)}{O(d)\times O(d)}\right]=\frac{2d(2d-1)}{2}-2\times\frac{d(d-1)}{2}=d^2, \tag{5.177}$$

となるが，これは確かに計量 G_{ij} と反対称テンソル場 B_{ij} の独立な成分の数の和と一致している．

例 2　$(r,s)=(d+16,d)$

この場合，ナライン格子 Λ に対し，分配関数

$$Z_{\Lambda,\mathrm{het}}(\tau,\bar{\tau})=\frac{1}{\eta(\tau)^{16+d}\overline{\eta(\tau)^d}}\Theta_\Lambda(\tau,\bar{\tau})\cdot\frac{1}{2}\overline{\mathcal{J}(\tau)}, \tag{5.178}$$

$$\mathcal{J}(\tau)\equiv\left(\frac{\theta_3}{\eta}\right)^4-\left(\frac{\theta_4}{\eta}\right)^4-\left(\frac{\theta_2}{\eta}\right)^4, \tag{5.179}$$

はモジュラー不変である．これは d 次元トーラスにコンパクト化されたヘテロティック超弦理論のモジュラー不変分配関数の主要部分を与える．特に $d=0$ のときナライン格子 Λ は正定値であり，16 次元では

$$\Lambda=\Gamma_{16},\quad \Gamma_8\times\Gamma_8, \tag{5.180}$$

$$\Gamma_{16}\equiv\left\{\sum_{i=1}^{16}k_i\boldsymbol{e}_i\,;\,k_i\in\mathbb{Z}\ (^\forall i)\ \text{または}\ k_i\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\ (^\forall i),\ \sum_{i=1}^{16}k_i\in 2\mathbb{Z}\right\}, \tag{5.181}$$

$$\Gamma_{8}\equiv\left\{\sum_{i=1}^{8}k_i\boldsymbol{e}_i\,;\,k_i\in\mathbb{Z}\ (^\forall i)\ \text{または}\ k_i\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\ (^\forall i),\ \sum_{i=1}^{8}k_i\in 2\mathbb{Z}\right\}, \tag{5.182}$$

の **2 種類しか存在しない**ことが知られている．Γ_{16} は，$SO(32)$ のルート格子にひとつのスピノル表現のウェイトを加えることによって得られるもので，「$Spin(32)/\mathbb{Z}_2$ 格子」と呼ばれることも多い．また Γ_8 は E_8 のルート格子に等しい．$\Lambda=\Gamma_{16}$, $\Gamma_8\times\Gamma_8$ は正定値なので，このとき $\Theta_\Lambda(\tau,\bar{\tau})$ は正則な（つまり通常の意味での）テータ関数に帰着する；

$$\Theta_{\Gamma_{16}}(\tau)\equiv\sum_{\boldsymbol{p}\in\Gamma_{16}}q^{\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle}=\frac{1}{2}\Big(\theta_3(\tau)^{16}+\theta_4(\tau)^{16}+\theta_2(\tau)^{16}\Big), \tag{5.183}$$

$$\Theta_{\Gamma_8\times\Gamma_8}(\tau)\equiv\Theta_{\Gamma_8}(\tau)^2, \tag{5.184}$$

$$\Theta_{\Gamma_8}(\tau)\equiv\sum_{\boldsymbol{p}\in\Gamma_8}q^{\frac{1}{2}\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle}=\frac{1}{2}\Big(\theta_3(\tau)^{8}+\theta_4(\tau)^{8}+\theta_2(\tau)^{8}\Big). \tag{5.185}$$

Γ_8 は 8 次元における**唯一の**正定値自己双対偶格子であり，アフィン E_8 のレベル 1 の**ベーシック表現**（$h=0$ の真空で生成される可積分表現）の指標が，

$$\chi_0^{(\widehat{E_8})_1}(\tau)=\frac{\Theta_{\Gamma_8}(\tau)}{\eta(\tau)^8}\equiv\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^8+\left(\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^8+\left(\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^8\right\} \tag{5.186}$$

と与えられる事実を指摘しておこう．このことを見るには，$\varphi^i(z)\varphi^j(0)\sim-\delta^{ij}\ln z$ と規格化された 8 成分の自由ボソン場 $\varphi^i(z)$ $(i=1,\cdots,8)$ を用意する

とよい．(5.186)に含まれる $h=1$ の項は，q 展開の $q^{1-\frac{8}{24}}=q^{\frac{2}{3}}$ の係数として現れ，次のように分類される；

（i） $i\partial\varphi^i(z)$, $i=1,\cdots,8$. これは $1/\eta(\tau)^8$ に含まれ，E_8 のカルタン部分代数に対応する．

（ii） 頂点作用素 $e^{ip^i\varphi^i(z)}$．ただし $\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{8}p^i\boldsymbol{e}_i$ は，Γ_8 の整数格子点で $\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle=2$ となるもの．これは $\epsilon_i\boldsymbol{e}_i+\epsilon_j\boldsymbol{e}_j$ ($i<j$, $\epsilon_i=\pm1$, $\epsilon_j=\pm1$) と表される格子点であり，112 個存在する．

(iii) 頂点作用素 $e^{ip^i\varphi^i(z)}$．ただし $\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{8}p^i\boldsymbol{e}_i$ は，Γ_8 の半整数格子点で $\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle=2$ となるもの．これは $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\epsilon_i\boldsymbol{e}_i$ ($\epsilon_i=\pm1$, $\prod_i^8\epsilon_i=1$) と表される格子点であり，128 個存在する．

(i)と(ii)の 8+112=120 個の作用素は $SO(16)$ のレベル 1 のカレント代数を生成し，(iii)は $SO(16)_1$ のひとつのスピノル表現を与える．そして全体として，120+128=248 個の $h=1$ の作用素からなる E_8 のレベル 1 のカレント代数を生成するのである．

再び 2 つのナライン格子 Γ_{16}，$\Gamma_8\times\Gamma_8$ に立ち戻ろう．実を言うと，非自明な恒等式；

$$\Theta_{\Gamma_{16}}(\tau)\equiv\Theta_{\Gamma_8}(\tau)^2, \tag{5.187}$$

が存在する[*13]．したがって，$\Lambda=\Gamma_{16}$ と $\Lambda=\Gamma_8\times\Gamma_8$ に対し，モジュラー不変分配関数(5.178)は等しい値を与える．これは，すべての共形次元 h について，ナライン格子 Γ_{16} と $\Gamma_8\times\Gamma_8$ が与える共形場理論は同一の状態数を持つことを意味する．しかし，これら 2 つの理論が等価であると結論するのは早計である．実際，$h=1$ の状態に対応する作用素が生成するカレント代数はこの

---

*13 この恒等式は，ウェイト 8 の保型形式(modular form)が定数倍を除き一意的に決まるという数学的事実から導かれる．また(規格化された)アイゼンシュタイン級数；

$$E_{2k}(\tau)\equiv\frac{G_{2k}(\tau)}{2\zeta(2k)},\quad G_{2k}(\tau)\equiv\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{(0,0)\}}\frac{1}{(m+n\tau)^{2k}},$$

を用いると，$\Theta_{\Gamma_8}(\tau)=E_4(\tau)$, $\Theta_{\Gamma_{16}}(\tau)=E_8(\tau)$ と表せることを注意しておく．

両者で一致しない．$\Gamma_8\times\Gamma_8$ の場合，明らかに $(\widehat{E_8})_1\times(\widehat{E_8})_1$ を与える．一方，Γ_{16} の場合，上と同様に 16 成分の自由ボソン場 $\varphi^i(z)$ $(i=1,\cdots,16)$ を用意して，$h=1$ の作用素を調べると，

(i) $i\partial\varphi^i(z),\ i=1,\cdots,16$：これは $1/\eta(\tau)^{16}$ に含まれ，$SO(32)$ のカルタン部分代数に対応する．

(ii) 頂点作用素 $e^{ip^i\varphi^i(z)}$．ただし $\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{16}p^i\boldsymbol{e}_i$ は，Γ_{16} の整数格子点で $\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle=2$ となるもの．これは $\epsilon_i\boldsymbol{e}_i+\epsilon_j\boldsymbol{e}_j$ $(i<j,\ \epsilon_i=\pm1,\ \epsilon_j=\pm1)$ と表される格子点であり，480 個存在する．

(iii) 頂点作用素 $e^{ip^i\varphi^i(z)}$．ただし $\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{16}p^i\boldsymbol{e}_i$ は，Γ_{16} の半整数格子点で $\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}\rangle=2$ となるもの．容易にわかるようにこのタイプは存在しない．

これらの 16+480=496 個の $h=1$ の作用素は $\widehat{SO}(32)_1$ のカレント代数を生成する．ヘテロティック超弦理論においては，ナライン格子 Γ_{16}，$\Gamma_8\times\Gamma_8$ は，それぞれ $SO(32)$，$E_8\times E_8$ のゲージ対称性を持つ低エネルギー有効理論を与える．(5.183)，(5.184)の表式が示すように，これらの分配関数はまた 32 成分のカイラルなマヨラナ・フェルミオンを用いても構成することができ，既に 5.2.3 項で見たボソン・フェルミオン対応の一例となっている[*14]．

例 3 $(r,s)=(24,0)$

24 次元の正定値な自己双対格子は**ニーマイヤー格子**(Niemeier lattice)と呼ばれ，24 種類存在することが知られている．この場合，**正則部分のみで**モジュラー不変性が実現され，最近の文献ではそうした性質(「正則因子化」と呼ばれる)を持つ共形場理論を「extremal CFT」と呼ぶことがある [47]．ニーマイヤー格子が与えるモジュラー不変分配関数は，定数項を除いてすべて「j 不変量」

---

*14 ここで (r,s) の符号を持つ自己双対偶格子が存在するための条件：$r-s\equiv0 \pmod 8$ が，$Spin(r,s)$ がマヨラナ・ワイル・スピノルを持つための条件にもなっているという事実を指摘しておこう．

$$j(\tau) \equiv \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^8+\left(\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^8+\left(\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^8\right\}^3$$
$$= \frac{1}{q}+744+196884q+21493760q^2+\cdots \qquad (5.188)$$

と一致する(付録の(A.49)，(A.52)を参照)．これは，$\tau \to i\infty$ で，$Z(\tau) \sim \frac{1}{q}$ とふるまう $\mathbb{C}$ 上正則でモジュラー不変な関数が定数項を除き一意的に決まり，$j(\tau)$ で与えられるという数学的事実による．$j(\tau)$ の定数項を除いたものを $J(\tau)$ と書くことにすると，すなわち，

$$J(\tau) \equiv j(\tau)-744, \qquad (5.189)$$

と定義すると，一般にニーマイヤー格子 Λ が定めるモジュラー不変分配関数は，

$$Z_\Lambda(\tau) \equiv \frac{\Theta_\Lambda(\tau)}{\eta(\tau)^{24}} \equiv \frac{1}{\eta(\tau)^{24}} \sum_{\boldsymbol{p}\in\Lambda} q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2}$$
$$= J(\tau)+24+N_2(\Lambda) \qquad (5.190)$$

と表せることになる．ただし，Λ の $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle=2$ となる格子点「ルート」の個数を $N_2(\Lambda)$ と表した．上と同様に $\varphi^i(z)\varphi^j(w) \sim -\delta^{ij}\ln(z-w)$ となる 24 成分のカイラル・ボソンを導入すると，(5.190)の定数項の意味は明らかとなる：ボソンの振動子 $\alpha^i_{-1} \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z} i\partial\varphi(z)$ が 24 を与え，また頂点作用素 $e^{ip^i\varphi^i(z)}$ のうち，$h=1$ となるものが $N_2(\Lambda)$ 個存在する．

ニーマイヤー格子の簡単な例として，$\Lambda=\Gamma_8\times\Gamma_8\times\Gamma_8\ (\equiv\Gamma_8^3)$ と選ぶと，

$$N_2(\Gamma_8^3) = 3\times 240 = 720$$

であるので，

$$Z_{\Gamma_8^3}(\tau) = J(\tau)+24+720 = j(\tau) \qquad (5.191)$$

となる．これは既に与えた有名な恒等式；

$$j(\tau)=\left(\chi_0^{(E_8)_1}(\tau)\right)^3 \equiv \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^8+\left(\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^8+\left(\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^8\right\}^3 \tag{5.192}$$

に帰着する．

また，Γ_8, Γ_{16} と同様に定義される

$$\Gamma_{24}\equiv\left\{\sum_{i=1}^{24}k_i\boldsymbol{e}_i\ ;\ k_i\in\mathbb{Z}\ (^\forall i)\ \text{または}\ k_i\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\ (^\forall i),\ \sum_{i=1}^{24}k_i\in 2\mathbb{Z}\right\}, \tag{5.193}$$

もニーマイヤー格子である．これを用いると，$N_2(\Gamma_{24})=1104$ となることがわかるので，

$$\begin{aligned} Z_{\Gamma_{24}}(\tau) &\equiv \frac{\Theta_{\Gamma_{24}}(\tau)}{\eta(\tau)^{24}} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{24}+\left(\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{24}+\left(\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{24}\right\} \\ &= J(\tau)+1128, \end{aligned} \tag{5.194}$$

となる．これは 48 成分のマヨラナ・ワイル・フェルミオンのモジュラー不変分配関数と解釈してもよい．

最後に $N_2(\Lambda)=0$ となるニーマイヤー格子はただ 1 種類存在して**リーチ格子** (Leech lattice) と呼ばれるが，この場合は，

$$Z_{\text{Leech}}(\tau)=J(\tau)+24 \tag{5.195}$$

を与える．さらに $\mathbb{Z}_2$ オービフォルド化：$\varphi^i\to-\varphi^i$ を行うと，24 個の振動子による励起部分が取り除かれるので定数項がなくなり，

$$Z_{\text{Leech},\,\mathbb{Z}_2\,\text{オービフォルド}}(\tau)=J(\tau) \tag{5.196}$$

を与える．これが最も基本的な $c=24$ の extremal CFT と考えられ，「モンスター群」と呼ばれる巨大な位数を持つ有限群の研究と深い関係にあることが

知られている*15．$c<24$ の extremal CFT は存在しないことが知られており，また $c>24$ の(既約な) extremal CFT に関してはあまり詳しいことがわかっていない．

コメント **ナライン・モジュライ空間と T 双対性変換** 一般に符号 (r,s) を持つナライン格子は，(5.176)の拡張として，商空間

$$\frac{O(r,s)}{O(r)\times O(s)}, \tag{5.197}$$

によってパラメータ化される．もう少し精密に述べると，分子の $O(r,s)$ 変換のうち，ナライン格子 Λ を Λ 自身に写像する離散部分群 $O(r,s)_\Lambda \subset O(r,s)$ が存在する．これは理論の対称性となりモジュラー不変分配関数を不変に保つ．したがって，この離散部分群の作用で同一視した空間が正しい理論のパラメータ空間(**モジュライ空間**と呼ばれる)となる．離散部分群 $O(r,s)_\Lambda$ はもちろん Λ に依存するが，すべて同型なので，簡単に $O(r,s;\mathbb{Z})$ と書かれることが多い．弦理論においてはこの対称性は T 双対性にあたる．

たとえば，d 次元トーラス上の非線形シグマ模型(5.169)によって定義される共形場理論のモジュライ空間は，商空間

$$\frac{O(d,d)}{O(d)\times O(d)\times O(d,d;\mathbb{Z})} \tag{5.198}$$

と同定される．同様に d 次元トーラスにコンパクト化されたヘテロティック超弦理論のモジュライ空間は，

$$\frac{O(d,d+16)}{O(d)\times O(d+16)\times O(d,d+16;\mathbb{Z})} \tag{5.199}$$

で与えられる．おもしろいことに，このモジュライ空間はタイプ IIA 超弦理論を $T^{d-4}\times K3$ にコンパクト化した場合のモジュライ空間と一致しており，この事実に関する深い考察が超弦理論における双対性の研究の契機となった [48]．

*15 興味のある読者は，かなり専門的ではあるが，[11] を参照．また，日本語で読めるモンスター群の解説書として [12] を挙げておく．関連する最近の進展については 7.5 節を参照．

6
有理共形場理論

6.1 有理共形場理論

ビラソロ代数をその部分代数に含む**カイラル代数** $\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}$ の対称性を持つ中心電荷 c の共形場理論を考えよう．すなわちカイラル代数 $\mathcal{A}$ は，ビラソロ代数 $\{L_n\}$ に加え，共形ウェイト $\Delta_j\left(\in\dfrac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}\right)$ のプライマリー場である「カレント」$\{\mathcal{J}_r^{(j)}\}$ から生成されていると仮定する*1．モード r は $\Delta_j\in\mathbb{Z}_{>0}$ のときは整数値を走り，また $\Delta_j\in\dfrac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のときは，NS セクターか R セクターに応じて半整数値か整数値を走る．簡単のためカイラル代数の正則部分 $\mathcal{A}$ と反正則部分 $\bar{\mathcal{A}}$ は同型であると仮定する．

次の条件 1〜5 を満たす共形場理論を**有理共形場理論**(rational conformal field theory)*2と呼ぶ；

1　理論のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は，カイラル代数 $\mathcal{A}$，$\bar{\mathcal{A}}$ のある**有限個の**既約表現 $\mathcal{V}_i, \overline{\mathcal{V}}_j$ $(i,j\in I,\ \sharp I<\infty)$ を用いて，

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{i,j\in I}N_{ij}\mathcal{V}_i\otimes\overline{\mathcal{V}}_j \tag{6.1}$$

と直和分解される．ここで非負の整数値 N_{ij} は既約表現 $\mathcal{V}_i\otimes\overline{\mathcal{V}}_j$ の縮退度を表している．既約表現 $\mathcal{V}_i$ は縮退したプライマリー状態 $|\phi_{i,\alpha_i}\rangle$ によって生成されていると仮定する．プライマリー状態 $|\phi_{i,\alpha_i}\rangle\,(\alpha_i=1,\cdots,r_i)$

*1　パラフェルミオン理論の場合，カイラル代数に属するカレントは一般の有理数を取り得るが，ここでは簡単のためその可能性は考えない．

*2　有理共形場理論のより完全な「公理的」記述については，文献 [49, 50, 51] を参照．

は，次のように特徴付けられる；

$$\begin{aligned} L_n|\phi_{i,\alpha_i}\rangle &= 0, \quad ({}^\forall n \geq 1), \\ L_0|\phi_{i,\alpha_i}\rangle &= h_i|\phi_{i,\alpha_i}\rangle, \\ \mathcal{J}_r^{(j)}|\phi_{i,\alpha_i}\rangle &= 0, \quad ({}^\forall r > 0). \end{aligned} \tag{6.2}$$

反正則部分 $\overline{\mathcal{V}}_j$ についても同様である．

2 理論が唯一の共形不変な真空 $|0\rangle\otimes\overline{|0\rangle}$ を持ち，

$$\begin{aligned} L_n|0\rangle &= 0, \quad ({}^\forall n \geq -1), \\ \mathcal{J}_r^{(j)}|0\rangle &= 0, \quad ({}^\forall r > -\Delta_j), \end{aligned} \tag{6.3}$$

が成り立つ(反正則部分も同様)．真空 $|0\rangle$ が生成するカイラル代数 $\mathcal{A}$ の既約表現(真空表現)を $\mathcal{V}_0$ と表すことにすると，真空の一意性から $N_{0,0}=1$ でなければならない．

3 各プライマリー状態 $|\phi_{i,\alpha_i}\rangle$ に対し，プライマリー場 $\phi_{i,\alpha_i}(z)$ が一意的に定まり，「演算子-状態対応」；

$$\lim_{z\to 0} \phi_{i,\alpha_i}(z)|0\rangle = |\phi_{i,\alpha_i}\rangle, \qquad \lim_{z\to\infty} \langle 0|\phi_{i,\alpha_i}(z)\, z^{2h_i} = \langle\phi_{i,\alpha_i}|, \tag{6.4}$$

が成立する(反正則部分も同様)．明らかに演算子-状態対応によって真空 $|0\rangle$ には恒等演算子 $\mathbf{1}$ が対応する．

4 プライマリー場 $\phi_{i,\alpha_i}(z)$ 全体は，OPE に関して閉じた代数をなす；

$$\phi_{i,\alpha_i}(z)\phi_{j,\beta_j}(w) = \sum_{k\in I}\sum_{\gamma_k=1,\cdots,r_k} \frac{C^{(k,\gamma_k)}_{(i,\alpha_i)\,(j,\beta_j)}}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k}}\,\phi_{k,\gamma_k}(w)+\cdots. \tag{6.5}$$

ここで演算子の積は結合則(associativity)を満たすことを仮定する．すなわち，

$$(\phi_{i,\alpha_i}(z)\phi_{j,\beta_j}(w))\,\phi_{k,\gamma_k}(u) = \phi_{i,\alpha_i}(z)\,(\phi_{j,\beta_j}(w)\phi_{k,\gamma_k}(u)), \tag{6.6}$$

を満たす．

5 計量 $G_{(i,\alpha_i),(j,\beta_j)}\equiv\langle\phi_{i,\alpha_i}|\phi_{j,\beta_j}\rangle$ が非退化であるとする．

上の定義において，**ビラソロ代数を拡張した**カイラル代数 $\mathcal{A}$ の既約表現を考えている点に注目しよう．一般に，$\mathcal{V}_j$ はビラソロ代数に対しては可約であってもよい．実際，多くの有理共形場理論においては，$\mathcal{V}_j$ はビラソロ代数の無限可約表現となる(たとえば，5.2.4 項のコメント「有理共形場理論」を参照)．

(1) 共形ブロックと双対性

有理共形場理論の相関関数の構造について少し詳しく調べてみよう．話をやさしくするため，ヒルベルト空間の正則部分と反正則部分は対称であるとし，各既約表現の縮重度も 1 であるとする．すなわち，$N_{ij}=\delta_{ij}$ とおく．さらに，記号の煩雑さを避けるため，プライマリー場のラベル (i,α_i) を改めて I と書くこととし，正則部分と反正則部分を合わせたプライマリー場を $\Phi_I(z,\bar{z})$ と定義する．2 つのプライマリー場 $\Phi_I(z,\bar{z})$，$\Phi_J(w,\bar{w})$ の OPE は，

$$\Phi_I(z,\bar{z})\Phi_J(w,\bar{w})=\sum_K \frac{{C_{IJ}}^K}{|z-w|^{2(h_I+h_J-h_K)}}\Phi_K(w,\bar{w})+\cdots, \tag{6.7}$$

と書かれることとなる．プライマリー場 Φ_I にカイラル代数の演算子を作用させて作られるディセンダント全体の集合を，「Φ_I の**共形族**(conformal family)」と呼ぶ．$I=(i,\alpha_i)$ であるとき，Φ_I の共形族に属する場は，既約表現 $\mathcal{V}_i$ の元と 1 対 1 に対応する．以下の議論のために 2 つのプライマリー場の OPE (6.7) を精密化しておこう；

$$\Phi_I(z,\bar{z})\Phi_J(0,0)=\sum_k\sum_{\lambda,\bar{\lambda}}\frac{{C_{IJ}}^K}{|z|^{2(h_I+h_J-h_K)}}\Psi_K(z,\bar{z}|0,0), \tag{6.8}$$

$$\Psi_K(z,\bar{z}|0,0)\equiv\sum_{(\lambda,\bar{\lambda})\in[K]}\beta_{I,J}^{K,\lambda}\bar{\beta}_{I,J}^{K,\bar{\lambda}}\,z^{|\lambda|}\bar{z}^{|\bar{\lambda}|}\Phi_K^{(\lambda,\bar{\lambda})}(0,0).$$

ここで，記号 $(\lambda,\bar{\lambda})\in[K]$ は，$\Phi_K^{(\lambda,\bar{\lambda})}(0,0)$ が $(\lambda,\bar{\lambda})$ でラベルされる Φ_K の共形族に属すディセンダントであることを表しており，プライマリー状態との共形ウェイトの差を表すのに $|\lambda|$, $|\bar{\lambda}|$ という記号を導入した．たとえば $\mathcal{A}$ がビラソロ代数そのものである最も簡単な場合は，

$$\Phi_K^{(\lambda,\bar{\lambda})}(0,0)=\prod_r L_{-n_r}\prod_s \widetilde{L}_{-\bar{n}_s}\Phi_K(0,0),\qquad |\lambda|\equiv\sum_r n_r,\quad |\bar{\lambda}|\equiv\sum_s \bar{n}_s,$$

などを意味する．ディセンダントの係数 $\beta_{I,J}^{K,\lambda}$, $\bar{\beta}_{I,J}^{K,\bar{\lambda}}$ は，OPE (6.8)の両辺のカイラル代数に対する変換性を比較することによって，order by order で決定することができる[*3]．例によって，$\beta_{I,J}^{K,\lambda}$ と $\bar{\beta}_{I,J}^{K,\bar{\lambda}}$ に因子化するのは共形不変性の帰結である．

以下の準備のもとで重要な**共形ブロック**の概念を導入することができる．

一般にジーナス g のリーマン面上で定義されたプライマリー場の N 点相関関数を，

$$\left\langle \Phi_{I_1}(z_1,\bar{z}_1)\Phi_{I_2}(z_2,\bar{z}_2)\cdots\Phi_{I_N}(z_N,\bar{z}_N)\right\rangle_g$$

と表すことにしよう．

$$\left\langle \Phi_I(z,\bar{z})\Phi_J(w,\bar{w})\right\rangle_0 = \frac{G_{IJ}}{|z-w|^{4h_I}}. \tag{6.9}$$

共形不変性より，

$$G_{IJ}\neq 0 \qquad \text{ならば},\ h_I = h_J,$$

であることに注意．

$$\begin{aligned}
&\left\langle \Phi_{I_1}(z_1,\bar{z}_1)\Phi_{I_2}(z_2,\bar{z}_2)\Phi_{I_3}(z_3,\bar{z}_3)\right\rangle_0 \\
&\quad = \frac{C_{IJK}}{|z_1-z_2|^{2(h_{i_1}+h_{i_2}-h_{i_3})}|z_2-z_3|^{2(h_{i_2}+h_{i_3}-h_{i_1})}|z_3-z_1|^{2(h_{i_3}+h_{i_1}-h_{i_2})}}, \\
&C_{IJK} \equiv G_{LK}C_{IJ}{}^{L},
\end{aligned} \tag{6.10}$$

C_{IJK} は添え字 I, J, K について完全対称である．

次に4点関数 $\left\langle \Phi_{I_1}(z_1,\bar{z}_1)\Phi_{I_2}(z_2,\bar{z}_2)\Phi_{I_3}(z_3,\bar{z}_3)\Phi_{I_4}(z_4,\bar{z}_4)\right\rangle_0$ を考えよう．1.5節で述べたように，大域的な共形不変性 $\cong SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ を用いることによって，4点関数は交差比；

$$x \equiv \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}, \qquad \bar{x} \equiv \frac{(\bar{z}_1-\bar{z}_2)(\bar{z}_3-\bar{z}_4)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_3)(\bar{z}_2-\bar{z}_4)},$$

のみの関数となる．言い換えれば，$SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ 変換の自由度を用い

*3　たとえば，$\mathcal{A}$ がビラソロ代数の場合は，文献 [21] の Appendix B に詳しく解説されている．

$$\mathcal{F}_{K,\,L}^{I,\,J}(P|x) =$$

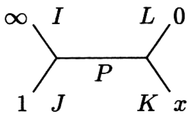


図 6.1　共形ブロック

て 4 点のうち 3 点を好きな座標に固定することが可能である；

$$z_1 = \infty, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = x, \quad z_4 = 0.$$

このとき，($I_1{=}I$, $I_2{=}J$, $I_3{=}K$, $I_4{=}L$ と書き直すと)求める 4 点関数は，実質的に x, $\bar{x}$ の複素関数として，

$$\begin{aligned} G_{K,L}^{I,J}(x,\bar{x}) &\equiv \lim_{z_1,\bar{z}_1 \to \infty} |z_1|^{4h_I} \Big\langle \Phi_I(z_1,\bar{z}_1)\Phi_J(1,1)\Phi_K(x,\bar{x})\Phi_L(0,0) \Big\rangle_0 \\ &\equiv \langle I|\Phi_J(1,1)\Phi_K(x,\bar{x})|L\rangle, \end{aligned} \tag{6.11}$$

と表せることとなる．($|L\rangle$，$\langle I|$ は，(6.4)によって対応するプライマリー状態) OPE (6.8)を用いて，まず $\Phi_K(x,\bar{x})|L\rangle \equiv \Phi_K(x,\bar{x})\Phi_L(0,0)|0\rangle$ をべき展開すると，相関関数(6.11)は，次の公式で表されることが示される；

$$G_{K,L}^{I,J}(x,\bar{x}) = \sum_P C_{KL}{}^P C_{IJP}\, \mathcal{F}_{K,L}^{I,J}(P|x)\overline{\mathcal{F}_{K,L}^{I,J}(P|x)}, \tag{6.12}$$

$$\mathcal{F}_{K,L}^{I,J}(P|x) \equiv x^{h_P - h_K - h_L} \sum_{\lambda \in [P]} \beta_{K,L}^{P,\lambda} x^{|\lambda|} \frac{\langle I|\phi_J(1)|P,\lambda\rangle}{\langle I|\phi_J(1)|P\rangle}. \tag{6.13}$$

($|P,\lambda\rangle$ は共形族 $[P]$ に属すディセンダント)

この複素関数 $\mathcal{F}_{K,L}^{I,J}(P|x)$ を(球面 $\mathbb{CP}^1$ 上の 4 点関数に対する)**共形ブロック**と呼ぶ．おおまかに言って，共形ブロック $\mathcal{F}_{K,L}^{I,J}(P|x)$ は，図 6.1 の「内線」に現れる共形族 $[P]$ の全てのディセンダントを中間状態として足し上げたものと解釈することができる．言い換えれば，「プライマリー場 Φ_I, Φ_J と Φ_K, Φ_L の間に完全系を挟み，それを共形族について分解したもの」とみなしてもよい．

さて，4 点関数を計算する際，上ではまずプライマリー場 $\Phi_K(x,\bar{x})$ と $\Phi_L(0,0)$ の積を展開し，しかる後に残りの場の期待値を評価した．言い換えれば，まず z_3 が z_4 の近傍にあるとみなして，$z_3 \to z_4$ ($\Longleftrightarrow$ $x \to 0$)における

OPE を考えたわけである．しかしながら，相関関数の経路積分での定義に立ち戻れば明らかなように，先に $z_3 \to z_2$，あるいは $z_3 \to z_1$ における OPE を評価しても相関関数の計算結果は変わらないはずである．この事実が共形ブロックに対し非自明な関係式を与え，理論に強い拘束条件を課す．このような考え方を（世界面における）**双対性**(duality)と呼ぶ．

具体的に見てみよう（図 6.2 参照）：

<u>***s*-*t* 双対性**</u>

$$G^{I,J}_{K,L}(x,\bar{x}) = G^{I,L}_{K,J}(1-x, 1-\bar{x}). \tag{6.14}$$

すなわち，

$$\sum_P C_{KL}^{\;\;P} C_{PIJ}\, \mathcal{F}^{I,J}_{K,L}(P|x)\overline{\mathcal{F}^{I,J}_{K,L}(P|x)} = \sum_Q C_{KJ}^{\;\;Q} C_{QIL}\, \mathcal{F}^{I,L}_{K,J}(Q|1-x)\overline{\mathcal{F}^{I,L}_{K,J}(Q|1-x)}. \tag{6.15}$$

s-t 双対性は**交差対称性**(crossing symmetry)とも呼ばれ，プライマリー場の演算子積の結合則(6.6)の結果とみなすこともできる．

<u>***s*-*u* 双対性**</u>

$$G^{I,J}_{K,L}(x,\bar{x}) = \frac{1}{|x|^{4h_K}} G^{L,J}_{K,I}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\bar{x}}\right). \tag{6.16}$$

すなわち，

$$\sum_P C_{KL}^{\;\;P} C_{PIJ}\, \mathcal{F}^{I,J}_{K,L}(P|x)\overline{\mathcal{F}^{I,J}_{K,L}(P|x)} = \frac{1}{|x|^{4h_K}} \sum_R C_{KI}^{\;\;R} C_{RJL}\, \mathcal{F}^{L,J}_{K,I}\left(Q\,\middle|\,\frac{1}{x}\right)\overline{\mathcal{F}^{L,J}_{K,I}\left(Q\,\middle|\,\frac{1}{x}\right)}. \tag{6.17}$$

s-u 双対性は**交換対称性**(exchange symmetry)とも呼ばれる．

超幾何関数をよく知っている読者にとっては，交差対称性(6.15)，(6.17)は，超幾何関数の解析接続の公式を想起させるであろう．これは偶然ではなく，

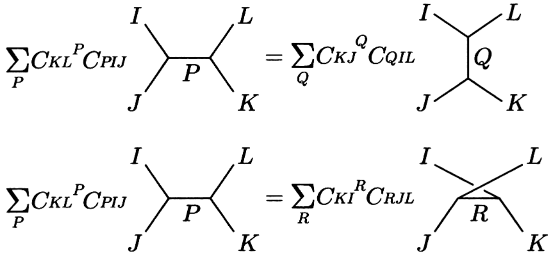


図 6.2 双対性の模式図.
上が「s-t 双対性(交差対称性)」，下が「s-u 双対性(交換対称性)」を表す.

1.4 節や 2.6 節で解説した共形ワード・高橋恒等式を使うことによって，共形ブロックは複素変数 x(モジュライ)の関数として，3 つの特異点 $x=0, 1, \infty$ を除き正則であり，しかもこれらの特異点を確定特異点とする 2 階の常微分方程式の解であることが示される．これらはガウスの超幾何関数を特徴付ける性質であった．微分方程式論の見地から言えば，このように，有理共形場理論の共形ブロックは有限個の確定特異点を持つ微分方程式(フックス型微分方程式)の独立解となり，その事実が有理共形場理論の「可解性」の根拠となるのである．

(2) 一般のリーマン面における共形ブロック

有理共形場理論においては，演算子積の係数 $C_{IJ}{}^K$ が求められていれば，原理的には任意のジーナスのリーマン面上の多点相関関数を計算することができる．そのためのアルゴリズムは，球面 $\mathbb{CP}^1$ 上の 4 点関数で解説したように，プライマリー場の OPE (あるいは 3 点関数)を繰り返し用いることによって得られる．読者はいくつかの簡単な例で，上の 4 点関数 $G^{I,J}_{K,L}(x,\bar{x})$ を得るプロセスの拡張を試みられたい．ここでは，一般の共形ブロックの概念を導入し，一般のリーマン面での有理共形場理論の相関関数の構造についておおまかにスケッチしてみよう．詳細を知りたい読者は [49, 50, 51] 等を勉強して欲しい．

準備として，独立なプライマリー場をうまく選び，

$$G_{IJ} = \delta_{I^*J}, \tag{6.18}$$

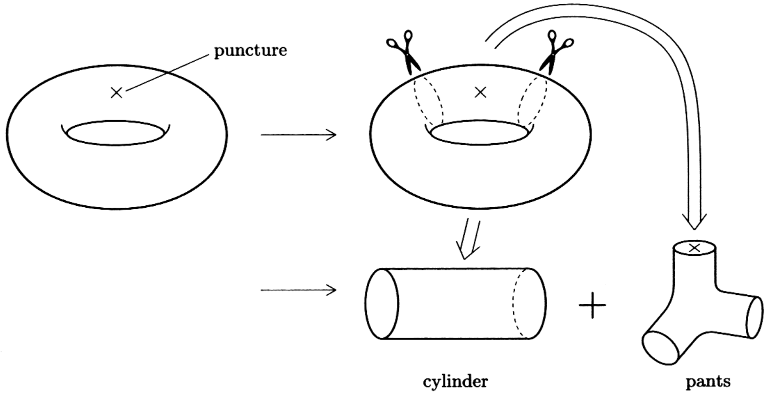


図 6.3 pants 分解の簡単な例.（ジーナス 1 で 1 個の puncture；puncture と pants のひとつの穴を同一視）

(I^* は I の荷電共役)と仮定しよう．ジーナス g のリーマン面 Σ_g 上の N 点関数：$\left\langle \Phi_{I_1}(z_1, \bar{z}_1)\cdots\Phi_{I_N}(z_N, \bar{z}_N)\right\rangle_g$ を考察する．

このとき，N 点関数を共形ブロックに分解する手続きは以下のようになる；

（i） プライマリー場 ϕ_{I_j} が挿入されたリーマン面 Σ_g を「N 個の穴(puncture)が開いたリーマン面(N-punctured Riemann surface)」とみなし，図 6.3 のように 3 つの穴の空いた“pants”と“cylinder”に分解する(**pants 分解**)．N 個の puncture は必ずどれかの pants につながり，pants 同士は cylinder を介してつながるというのがルールである．そして各 pants に「3 点頂点」を対応させ，cylinder には「内線」，puncture には「外線」を対応させると，“ϕ^3 ダイアグラム”が書ける．つまり，ϕ^3 理論のファインマン・ダイアグラムとのアナロジーでは，

相互作用頂点 $\longleftrightarrow$ pants,　プロパゲーター(内線) $\longleftrightarrow$ cylinder,

外線 $\longleftrightarrow$ puncture

の対応と考えればよい．そして，各頂点につながる内線，及び外線には向きをつけ，矢印を割り振る[*4]．以下，ここで構成された ϕ^3 ダイアグラム

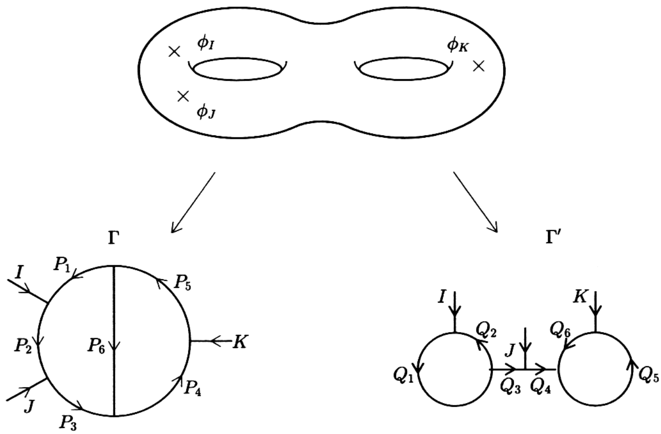


図 6.4 ジーナス 2 で 3 つの puncture を持つリーマン面に対する ϕ^3 ダイアグラムの例

を Γ とする.

ダイアグラム Γ は穴が開いたリーマン面 Σ_g から**一意的に決まるわけではないということに注意しよう**. Σ_g に対し, 複数の異なった ϕ^3 ダイアグラムが対応し得るのである(図 6.4 参照). しかしながら, 内線の数 $\mathcal{I}$, 頂点の数 $\mathcal{V}$ はリーマン面のジーナス g と puncture の数 N から一意的に定まり,

$$\mathcal{I} = 3g-3+N, \qquad \mathcal{V} = 2g-2+N, \tag{6.19}$$

となることがわかる.

(ii) 各外線に挿入するプライマリー場のラベル I_j ($j=1, \cdots, N$) を割り当て, 各内線には共形族のラベル P_i と穴の空いたリーマン面の複素構造の「モジュライ」μ_i を割り当てる ($i=1, \cdots, 3g-3+N$). 以下, 簡単のために, プライマリー場と共形族のラベルを総称して「表現」と呼ぶ.

(iii) 各 ϕ^3 頂点に, 3 点関数

---

*4 もし理論が「中性」なプライマリー場のみを含み, すべての表現について $I^*=I$ であるならば, この矢印は不要である. たとえば, カイラル代数が最も単純なビラソロ代数だけの場合がこのケースにあたる.

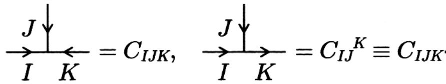


図 6.5 ϕ^3 頂点に対応する 3 点関数

$$C_{IJK} \equiv C_{IJ}{}^{K^*} = \langle K|\phi_J(1,1)|I\rangle, \tag{6.20}$$

を割り当てる．線分の矢印についての約束として，線分を走る表現が I の場合，矢印が頂点に向かっている場合はそのまま I を，また矢印が頂点から外に向かっている場合は，「荷電共役」I^*(または上付きの添え字 I)を対応させる(図 6.5 参照)．

(iv) 以上の準備のもとに相関関数は次のように表される；

$$\left\langle \Phi_{I_1}(z_1,\bar{z}_1)\cdots\Phi_{I_N}(z_N,\bar{z}_N)\right\rangle_g = \prod_i \prod_v \sum_{\{P_i\}} C^{(v)}_{*,*,*}\mathcal{F}^{[\Gamma]}(\{P_i\}|\{\mu_i\})\,\overline{\mathcal{F}^{[\Gamma]}(\{P_i\}|\{\mu_i\})}. \tag{6.21}$$

ここで関数 $\mathcal{F}^{[\Gamma]}_{\{*\}}(\{P_i\}|\{\mu_i\})$ が ϕ^3 ダイアグラム Γ から決まる共形ブロックであり，OPE の「構造定数」C_{IJK} の寄与を因子化し，各内線に現れる共形族 P_i に含まれるディセンダントについて足し上げることで定義される．言わば，共形ブロックは相関関数のカイラル代数の表現論のみで決まる部分を抽出していると言うことができ，モジュライ μ_i の関数として(有限個の極を除き)正則である*5．ラベル v は全ての 3 点頂点を走り，$*$ は便宜的に内線および外線を走る表現を表している．

もともとの有限個のプライマリー場で演算子積が閉じているという仮定により，(6.21)の $\{P_i\}$ についての足し上げは高々有限和である．すなわち，

*5 より正確に述べると，共形ブロックは(puncture 付きの)リーマン面 $\Sigma_{g,N}$ のモジュライ空間上の正則ベクトル則の切断とみなすべきであるが，その辺りの解説は本書のレベルを超える．興味のある読者は，文献 [52] などを参照．

有理共形場理論においては，リーマン面ごとに独立な共形ブロックの個数は有限であり，相関関数は共形ブロックの双線形形式で書かれることとなる．

ϕ^3 ダイアグラム Γ の選び方ごとに相関関数(6.21)は違った表式で書かれることとなるが，それらは全て「双対」な関係にあり，繰り返し(6.15)，(6.17)などの双対性の関係式を適用していくことで移りあうことができる．たとえば，図 6.4 に示す 2 つの ϕ^3 ダイアグラム Γ, Γ' に対する(6.21)の具体的な表式を表すと，

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \Phi_I(z_1,\bar{z}_1)\Phi_J(z_2,\bar{z}_2)\Phi_K(z_3,\bar{z}_3)\Big\rangle_2 \\
&= \sum_{\{P_i\}} C_{IP_1}{}^{P_2} C_{JP_2}{}^{P_3} C_{KP_4}{}^{P_5} C_{P_1P_5}{}^{P_6} C_{P_3P_6}{}^{P_4} \mathcal{F}^{[\Gamma]}(\{P_i\}|\{\mu_i\})\,\overline{\mathcal{F}^{[\Gamma]}(\{P_i\}|\{\mu_i\})} \\
&= \sum_{\{Q_i\}} C_{IQ_2}{}^{Q_1} C_{JQ_3}{}^{Q_4} C_{KQ_5}{}^{Q_6} C_{Q_1}{}^{Q_2Q_3} C_{Q_4Q_6}{}^{Q_5} \mathcal{F}^{[\Gamma']}\big(\{Q_i\}|\{\mu'_i\}\big)\,\overline{\mathcal{F}^{[\Gamma']}(\{Q_i\}|\{\mu'_i\})}.
\end{aligned}$$

6.2　有理共形場理論とモジュラー不変性

本節では有理共形場理論におけるモジュラー不変性に関する一般論について述べることにしよう．前節で定義したように，カイラル代数 $\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}$ の対称性を持つ中心電荷 c の共形場理論を考え，理論のヒルベルト空間は(6.1)で与えられているとする．

既に具体例について述べたように，中心電荷 c の共形場理論のトーラス分配関数は一般に次のように書くことができる；

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[q^{L_0-\frac{c}{24}}\,\bar{q}^{\tilde{L}_0-\frac{c}{24}}\right]. \tag{6.22}$$

$\mathcal{A}$ の既約表現 $\mathcal{V}_i$ の指標を，

$$\chi_i(\tau) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}_i}\left[q^{L_0-\frac{c}{24}}\right], \tag{6.23}$$

によって定義しよう．さらに指標の集合 $\chi_i(\tau)$ $(i\in I)$ はモジュラー変換 $SL(2,\mathbb{Z})$ のユニタリ表現を与えていることを仮定する．

$$\chi_i(\tau)|_T \equiv \chi_i(\tau+1) = \sum_{j\in I} T_{ij}\chi_j(\tau), \tag{6.24}$$

$$\chi_i(\tau)|_S \equiv \chi_i\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{j\in I} S_{ij}\chi_j(\tau). \tag{6.25}$$

ここで，$T\equiv(T_{ij})$，$S\equiv(S_{ij})$ はユニタリ行列であり，$SL(2,\mathbb{Z})$ の表現であるとは，

$$S^2 = C, \quad (ST)^3 = C \tag{6.26}$$

を満たすことを意味する．行列 $C=(C_{ij})$ は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$ に対応し，

$$C^2 = \mathbf{1}, \qquad C_{ij} = 0 \ (\mathcal{V}_i \not\cong \mathcal{V}_j \text{ のとき}) \tag{6.27}$$

という性質を持つ．C は一般にカイラル代数 $\mathcal{A}$ が $U(1)$ のカレントを含む場合は，荷電共役変換として働き，たとえば 5.2.4 項で見た $\widehat{R}=\sqrt{k}$ のコンパクト・ボソンの例では，

$$C \ : \ \chi_m \ \longrightarrow \ \chi_{-m}$$

と作用する．

仮定により $\overline{\mathcal{V}}_j$ の $\bar{\mathcal{A}}$ に関する指標は，$\overline{\chi_j(\tau)}$ に等しい．したがって分配関数(6.22)は指標 $\chi_i(\tau)$ を用いて，

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{i,j\in I} N_{ij}\chi_i(\tau)\overline{\chi_j(\tau)} \tag{6.28}$$

と書けることになる．

それでは，モジュラー不変性の要請はどのように表されるであろうか？(6.28)からわかるように，

$$\sum_{i,j} N_{ij}S_{ii'}\overline{S}_{jj'} = N_{i'j'}, \quad \sum_{i,j} N_{ij}T_{ii'}\overline{T}_{jj'} = N_{i'j'}, \tag{6.29}$$

が成立することが必要十分となる．

もしカイラル代数 $\mathcal{A}$ が整数スピンの共形カレントのみを含むならば，指標 $\chi_i(\tau)$ は，

$$\chi_i(\tau) = q^{h_i - \frac{c}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

という q のべき展開を持ち，h_i は対応するプライマリー場の共形次元に等しい．この場合，指標の T 変換は，

$$\chi_i(\tau)|_T = e^{2\pi i\left(h_i - \frac{c}{24}\right)} \chi_i(\tau), \tag{6.30}$$

となるので，(6.29)の 2 つ目の条件は簡単化されて，

$$N_{ij} = 0, \qquad (h_i \not\equiv h_j \ (\mathrm{mod}\, 1) \text{ のとき}) \tag{6.31}$$

と書くことができる．

また，S_{ij}，T_{ij} はユニタリ行列であるから，(6.29)の自明な解として，$N_{ij} = \delta_{ij}$ がある．これは「対角的モジュラー不変係数」と呼ばれ，最も頻繁に登場するものである．

簡単な有理共形場理論のモジュラー不変分配関数を見ておこう．

6.2.1　$SU(2)$-WZW 模型

最初に考えるのは $SU(2)$-WZW 模型である．4.1 節で解説したように，k を WZW 模型のレベルとするとき，正則部分には $k+1$ 個のプライマリー場が存在し，それぞれ $SU(2)$ カレント代数 $\{J^a\}_{a=1,2,3}$ のレベル k，スピン $\frac{\ell}{2}$ の可積分表現を生成する $(\ell=0,1,\cdots,k)$．指標公式は(4.15)で与えられており，そのモジュラー変換公式は次のように計算される．(τ, z) に対し，モジュラー変換は(5.8)と作用することに注意しよう．

$$\chi_{\ell,k}(\tau,z)|_S \equiv \chi_{\ell,k}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = e^{i\pi\frac{k}{2}\frac{z^2}{\tau}} \sum_{\ell'=0}^{k} S^{(k)}_{\ell,\ell'} \chi_{\ell',k}(\tau,z),$$
$$S^{(k)}_{\ell,\ell'} \equiv \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\pi \frac{(\ell+1)(\ell'+1)}{k+2}\right), \tag{6.32}$$

$$\chi_{\ell,k}(\tau,z)|_T \equiv \chi_{\ell,k}(\tau+1,z) = e^{2\pi i(\frac{\ell(\ell+2)}{4(k+2)}-\frac{k}{8(k+2)})}\chi_{\ell,k}(\tau,z)$$
$$= e^{2\pi i(\frac{(\ell+1)^2}{4(k+2)}-\frac{1}{8})}\chi_{\ell,k}(\tau,z). \qquad (6.33)$$

これらの公式を証明するには，付録に与えてあるテータ関数のモジュラー変換公式(A.16)，(A.17)を用いればよい．

$SU(2)$-WZW 模型のモジュラー不変分配関数は一般に

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{\ell,\bar{\ell}=0}^{k} N_{\ell\bar{\ell}}\,\chi_{\ell,k}(\tau)\overline{\chi_{\bar{\ell},k}(\tau)} \qquad (6.34)$$

という形を持つ($\chi_{\ell,k}(\tau)\equiv\chi_{\ell,k}(\tau,0)$)．既に述べたように最も単純なモジュラー不変係数は「対角型」$N_{\ell\bar{\ell}}=\delta_{\ell\bar{\ell}}$ である．それでは，この他にモジュラー不変分配関数はあり得るであろうか？　実はアフィン $SU(2)$ の指標を用いたモジュラー不変分配関数には完全な分類が知られており，興味深いことに simply laced なリー環と 1 対 1 対応する(**ADE 分類**)[53, 54]．その対応を見やすくするために，$g=k+2$ とおき，指標(4.15)を少し記号を変えて，

$$\chi_j \equiv \chi_{j-1,k}(\tau,0),$$

と書くことにしよう．g は対応する simply laced なリー環(ADE リー環)のコクセター数，j ($j=1,\cdots,g-1$)は指数と対応する(表 3.1 参照)．このときモジュラー不変分配関数の分類は，表 6.1 によって与えられる([　] はガウス記号である)．

6.2.2　ユニタリ・ミニマル模型

次に $c<1$ のユニタリ・ミニマル模型を考えよう．この場合，カイラル代数はビラソロ代数自体であり，プライマリー場はビラソロ代数の既約表現に対応している．モデルの中心電荷，プライマリー場の共形次元の公式は，

$$c = 1-\frac{6}{m(m+1)},\quad m = 3,4,5,\cdots \qquad (6.35)$$

$$h_{r,s} = h_{m-r,m+1-s} = \frac{[(m+1)r-ms]^2-1}{4m(m+1)},\qquad 1\le s\le r\le m-1, \qquad (6.36)$$

表 6.1 アフィン $SU(2)$ の指標を用いたモジュラー不変分配関数の分類：対角型モジュラー不変分配関数は A 型，また非対角型は D, E 型である．

$g=k+2,\ k=1,2,3,\cdots$

g: 任意	$\sum_{j=1}^{g-1} \lvert\chi_j\rvert^2$	A_{g-1}
g: 偶数	$\sum_{j=1}^{\frac{g}{2}} \lvert\chi_{2j-1}\rvert^2 + \sum_{j=-[\frac{g-2}{4}]}^{[\frac{g-2}{4}]} \chi_{\frac{g}{2}+2j}\chi^*_{\frac{g}{2}-2j}$	$D_{\frac{g}{2}+1}$
$g=12$	$\lvert\chi_1+\chi_7\rvert^2+\lvert\chi_4+\chi_8\rvert^2+\lvert\chi_5+\chi_{11}\rvert^2$	E_6
$g=18$	$\lvert\chi_1+\chi_{17}\rvert^2+\lvert\chi_5+\chi_{13}\rvert^2+\lvert\chi_7+\chi_{11}\rvert^2$ $+\lvert\chi_9\rvert^2+(\chi_3+\chi_{15})\chi_9^*+\chi_9(\chi_3+\chi_{15})^*$	E_7
$g=30$	$\lvert\chi_1+\chi_{11}+\chi_{19}+\chi_{29}\rvert^2+\lvert\chi_7+\chi_{13}+\chi_{17}+\chi_{23}\rvert^2$	E_8

と与えられ，対応するビラソロ代数の既約表現を $\mathcal{V}_{r,s}$ と表すことにしよう．

モデルの分配関数は一般に次の形を持つ；

$$Z = \sum_{\substack{1\le s\le r\le m-1\\ 1\le \tilde{s}\le \tilde{r}\le m-1}} N^{(m)}_{r,s;\tilde{r},\tilde{s}}\, \chi_{r,s}\overline{\chi_{\tilde{r},\tilde{s}}}. \tag{6.37}$$

ここで指標 $\chi_{r,s}$ の公式は(2.35)で与えられている．付録に与えてあるテータ関数のモジュラー変換公式(A.16)，(A.17)を用いると，次のモジュラー変換公式を示すことができる；

$$\chi_{r,s}(\tau)|_T = e^{2\pi i(h_{r,s}-\frac{c}{24})}\chi_{r,s}(\tau), \tag{6.38}$$

$$\chi_{r,s}(\tau)|_S = \sum_{r'=1}^{m-1}\sum_{s'=1}^{m} S_{(r,s),(r',s')}\chi_{r',s'}(\tau), \tag{6.39}$$

$$S_{(r,s),(r',s')} \equiv \sqrt{\frac{2}{m(m+1)}}(-1)^{(r+s)(r'+s')}\sin\left(\frac{\pi rr'}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi ss'}{m+1}\right).$$

(6.38)において，c, $h_{r,s}$ は(6.35)，(6.36)で与えられている．

詳細は割愛するが，モジュラー不変係数 $N^{(m)}_{r,s;\tilde{r},\tilde{s}}$ は完全な分類がなされている．そのための基本的な事実は，$SU(2)$-WZW 模型との次の関係である．今，レベル $k=m-2$，$k=m-1\,(m\geq 3)$ の $SU(2)$-WZW 模型のモジュラー不変分配関数；

$$Z_{SU(2)}^{(m-2)}(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{r,\tilde{r}=1}^{m-1} N_{r,\tilde{r}}^{(m-2)}\,\chi_{r-1}^{(m-2)}(\tau)\overline{\chi_{\tilde{r}-1}^{(m-2)}(\tau)},$$

$$Z_{SU(2)}^{(m-1)}(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{s,\tilde{s}=1}^{m} N_{s,\tilde{s}}^{(m-1)}\,\chi_{s-1}^{(m-1)}(\tau)\overline{\chi_{\tilde{s}-1}^{(m-1)}(\tau)},$$

が与えられているとする．このとき，

$$N_{r,s;\tilde{r},\tilde{s}}^{(m)} = N_{r,\tilde{r}}^{(m-2)} N_{s,\tilde{s}}^{(m-1)}, \tag{6.40}$$

すなわち，

$$\begin{aligned} Z_{\min}^{(m)}(\tau,\bar{\tau}) &= \sum_{\substack{1\le s\le r\le m-1\\ 1\le \tilde{s}\le \tilde{r}\le m-1}} N_{r,\tilde{r}}^{(m-2)} N_{s,\tilde{s}}^{(m-1)}\,\chi_{r,s}(\tau)\overline{\chi_{\tilde{r},\tilde{s}}(\tau)} \\ &\equiv \frac{1}{2}\sum_{r,\tilde{r}=1}^{m-1}\sum_{s,\tilde{s}=1}^{m} N_{r,\tilde{r}}^{(m-2)} N_{s,\tilde{s}}^{(m-1)}\,\chi_{r,s}(\tau)\overline{\chi_{\tilde{r},\tilde{s}}(\tau)}, \end{aligned} \tag{6.41}$$

は，$c=1-\dfrac{6}{m(m+1)}$ を持つユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_m$ のモジュラー不変分配関数となる．逆に $\mathcal{M}_m$ のモジュラー不変分配関数は一般に(6.41)の形に書けることも知られている．このようなユニタリ・ミニマル模型と $SU(2)$-WZW 模型の関係は偶然ではなく，6.4 節で解説する「コセット構成」を用いて自然に理解されることを付け加えておく．

こうして，ユニタリ・ミニマル模型のモジュラー不変分配関数の分類は，既に与えた $SU(2)$-WZW 模型のモジュラー不変分配関数の分類の問題に帰着する．知られている結果を表 6.2 にまとめておこう．

6.3 フェアリンデ公式

一般の有理共形場理論において，具体的に演算子積の係数 ${C_{IJ}}^K$(または 3 点関数 C_{IJK})を計算するのは容易ではない．しかし，より簡単な**フュージョン係数**(fusion coefficient) ${N_{IJ}}^K$ を求めるのは比較的容易であり，多くの重要な例で，**フュージョン規則**が物理的に重要な役割を果たす．有理共形場理論においては，**フェアリンデ公式**(Verlinde formula)[55] と呼ばれるフュージョン係数を決定する強力な手段が存在するので，本節で解説しよう．フェアリンデ公式は，指標のモジュラー変換性と演算子積という一見異なった 2 つの対象

表 6.2 ユニタリ・ミニマル模型のモジュラー不変分配関数：たとえば「(A_{m-1}, A_m) タイプ」の場合，添え字 r, $\tilde{r}$ に関して A_{m-1} 型，添え字 s, $\tilde{s}$ に関して A_m 型のモジュラー不変係数を選んでいることを意味する．

$$c=1-\frac{6}{m(m+1)}, \quad m=3,4,5,\cdots$$

m: 任意 (A_{m-1}, A_m)	$\displaystyle\sum_{1\le s\le r\le m-1} \lvert\chi_{r,s}\rvert^2$
m: 偶数 $(D_{\frac{m}{2}+1}, A_m)$	$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} \lvert\chi_{2j-1,s}\rvert^2 + \sum_{j=-[\frac{m-2}{4}]}^{[\frac{m-2}{4}]} \chi_{\frac{m}{2}+2j,s}\chi^*_{\frac{m}{2}-2j,s}\right\}$
m: 奇数 $(A_{m-1}, D_{\frac{m+3}{2}})$	$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m-1}\left\{\sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}} \lvert\chi_{r,2j-1}\rvert^2 + \sum_{j=-[\frac{m-1}{4}]}^{[\frac{m-1}{4}]} \chi_{r,\frac{m+1}{2}+2j}\chi^*_{r,\frac{m+1}{2}-2j}\right\}$
$m=11$ (A_{10}, E_6)	$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m-1}\left\{\lvert\chi_{r,1}+\chi_{r,7}\rvert^2+\lvert\chi_{r,4}+\chi_{r,8}\rvert^2+\lvert\chi_{r,5}+\chi_{r,11}\rvert^2\right\}$
$m=12$ (E_6, A_{12})	$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\left\{\lvert\chi_{1,s}+\chi_{7,s}\rvert^2+\lvert\chi_{4,s}+\chi_{8,s}\rvert^2+\lvert\chi_{5,s}+\chi_{11,s}\rvert^2\right\}$
$m=17$ (A_{16}, E_7)	$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m-1}\Big\{\lvert\chi_{r,1}+\chi_{r,17}\rvert^2+\lvert\chi_{r,5}+\chi_{r,13}\rvert^2+\lvert\chi_{r,7}+\chi_{r,11}\rvert^2$ $+\lvert\chi_{r,9}\rvert^2+(\chi_{r,3}+\chi_{r,15})\chi^*_{r,9}+\chi_{r,9}(\chi_{r,3}+\chi_{r,15})^*\Big\}$
$m=18$ (E_7, A_{18})	$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\Big\{\lvert\chi_{1,s}+\chi_{17,s}\rvert^2+\lvert\chi_{5,s}+\chi_{13,s}\rvert^2+\lvert\chi_{7,s}+\chi_{11,s}\rvert^2$ $+\lvert\chi_{9,s}\rvert^2+(\chi_{3,s}+\chi_{15,s})\chi^*_{9,s}+\chi_{9,s}(\chi_{3,s}+\chi_{15,s})^*\Big\}$
$m=29$ (A_{28}, E_8)	$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m-1}\Big\{\lvert\chi_{r,1}+\chi_{r,11}+\chi_{r,19}+\chi_{r,29}\rvert^2$ $+\lvert\chi_{r,7}+\chi_{r,13}+\chi_{r,17}+\chi_{r,23}\rvert^2\Big\}$
$m=30$ (E_8, A_{30})	$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\Big\{\lvert\chi_{1,s}+\chi_{11,s}+\chi_{19,s}+\chi_{29,s}\rvert^2$ $+\lvert\chi_{7,s}+\chi_{13,s}+\chi_{17,s}+\chi_{23,s}\rvert^2\Big\}$

を関係付けるという点で非常に興味深く実用上も有用である．

6.3.1 フュージョン規則

まず**フュージョン係数**を定義しておこう．プライマリー場の演算子積展開(6.7)において，係数 $C_{IJ}{}^{K}$ がゼロかゼロでないかのみを問題とし，

$$N_{IJ}{}^{K} \equiv \begin{cases} 1 & (C_{IJ}{}^{K} \neq 0), \\ 0 & (C_{IJ}{}^{K} = 0), \end{cases} \tag{6.42}$$

とおく*6. 言い換えれば, 計量(または荷電共役行列) $G_{IJ} \equiv \delta_{IJ^*}$ を用いて添え字を下げ, $N_{IJK} \equiv N_{IJ}{}^{L} G_{KL}$, を用いれば,

$$N_{IJK} = 1 \iff \left\langle \phi_I(z_1, \bar{z}_1)\phi_J(z_2, \bar{z}_2)\phi_K(z_3, \bar{z}_3) \right\rangle_0 \neq 0, \tag{6.43}$$

と考えることもできる. クレブシュ・ゴルダン規則と同じような考え方で, フュージョン規則を次のように表記することも多い ;

$$[\phi_I] \times [\phi_J] \cong \sum_K N_{IJ}{}^{K} [\phi_K]. \tag{6.44}$$

ここで, $[\phi_I]$ はプライマリー場 ϕ_I の共形族を表す.

フュージョン規則について, 有用なコメントを 2 つ付け加えておこう :

コメント **フュージョン代数** フュージョン係数 $N_{IJ}{}^{K}$ を行列 $(\boldsymbol{N}_I)_J{}^{K} \equiv N_{IJ}{}^{K}$ とみなすと, 行列の積によりある種の代数を生成すると考えられるが, これを「フュージョン代数」と呼ぶ. たとえば s-t 双対性(6.15)により,

$$\boldsymbol{N}_I \boldsymbol{N}_J = \sum_K N_{IJ}{}^{K} \boldsymbol{N}_K, \tag{6.45}$$

が成立し, また, s-u 双対性(6.17)は, フュージョン代数が可換であることを示している ;

$$\boldsymbol{N}_I \boldsymbol{N}_J = \boldsymbol{N}_J \boldsymbol{N}_I. \tag{6.46}$$

すなわち, フュージョン代数は可換かつ結合的な代数であり, フュージョン規則(6.44)と同型の代数関係を満足することがわかる.

コメント **共形ブロックの数** 既に述べたように, 有理共形場理論における共形ブロックのなす線形空間は有限次元であるが, その次元は, 6.1 節で

*6 もし理論のプライマリー場のスペクトルに縮退がある場合は, フュージョン係数 $N_{IJ}{}^{K}$ に正の整数値を許すのが便利である.

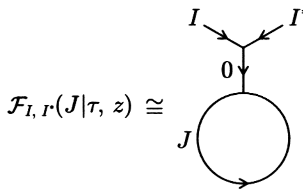


図 6.6　1 ループの共形ブロック.
内線の表現 0 は真空表現を表す.

考えた ϕ^3 ダイアグラムにおいて，各 3 点頂点に C_{IJK} の代わりにフュージョン係数 N_{IJK} を割り当て，内線には単に 1 を割り当てることによって計算できる(なぜそうなるかは考えてみて欲しい)．再び双対性，または(6.45)，(6.46)の関係により，この計算は ϕ^3 ダイアグラムの選び方には依存しないことが証明できる.

6.3.2　フェアリンデ公式

上で述べたようにフュージョン代数の生成元 $\{\boldsymbol{N}_I\}$ は全て可換であるから，同時対角化ができることになるが，具体的にどのように対角化されるかについて論じよう.

まず 1 ループ(トーラス)の共形ブロック $\mathcal{F}_{I,I^*}(J|\tau,z)$ を考える(図 6.6)．共形ブロックの定義より，以下の表現 J の指標 $\chi_J(\tau)$ との関係は明らかであろう；

$$\lim_{z\to 0} z^{2h_I}\mathcal{F}_{I,I^*}(J|\tau,z)=\chi_J(\tau). \tag{6.47}$$

z はこの共形ブロックのモジュライであり，具体的にはプライマリー場 ϕ_I の挿入点を表す．トーラスの 2 つのサイクルの方向への 1 周期分の並進

$$z\ \longmapsto\ z+1,\qquad\qquad z\ \longmapsto\ z+\tau,$$

を考えよう．そして，関係式(6.47)を用い，指標に対する a, b サイクル方向の並進を以下のように定義する(図 6.7 参照)；

$$\begin{aligned}\phi_I(a)\cdot\chi_J(\tau)&\equiv\lim_{z\to 0} z^{2h_I}\mathcal{F}_{I,I^*}(J|\tau,z+1),\\ \phi_I(b)\cdot\chi_J(\tau)&\equiv\lim_{z\to 0} z^{2h_I}\mathcal{F}_{I,I^*}(J|\tau,z+\tau).\end{aligned} \tag{6.48}$$

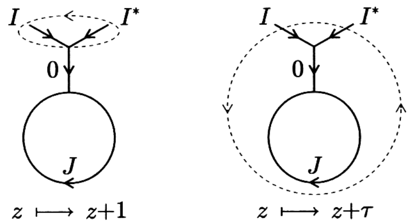


図 6.7　左が a サイクル方向の並進，
右が b サイクル方向の並進を表す

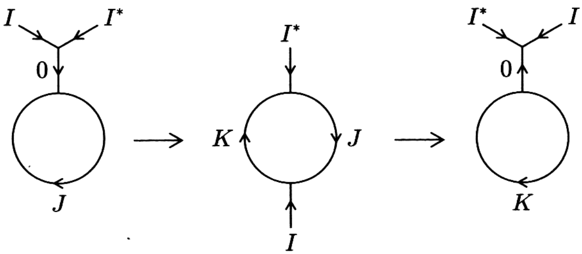


図 6.8　b サイクル方向の並進を双対性変換で表した模式図
内線の表現 K の選び方からフュージョン係数 ${N_{IJ}}^K$ が
現れる．

さて，a サイクル方向の並進は指標 χ_J を本質的に変更せず，単なる対角行列による作用となるが，b サイクル方向の並進は双対性変換を用いて非自明に働く(図 6.8)．ここでは詳細に立ち入らないが，双対性変換に寄与できる内線の表現の自由度から，フュージョン行列 $\boldsymbol{N}_I$ による指標の線形変換として働くことがわかる*7；

$$\phi_I(b)\cdot\chi_J = \sum_K {N_{IJ}}^K \chi_K. \tag{6.49}$$

さて，モジュラー S 変換は a サイクルと b サイクルを入れ替えるため，$S\cdot\phi_I(b)=\phi_I(a)^{-1}\cdot S$ の関係が成立し，

*7　こうしたフェアリンデ公式の証明はもともとは [49] による．教科書による詳しい解説として，たとえば [1] を参照．

$$\sum_K N_{IJ}{}^K S_{KM} = S_{JM}\lambda_I^{(M)}, \tag{6.50}$$

が得られる．ここで，$\phi_I(a)^{-1}$ の作用を

$$\phi_I(a)^{-1}\cdot\chi_J = \lambda_I^{(J)}\chi_J, \tag{6.51}$$

として c 数 $\lambda_I^{(J)}$ を定義した((6.51)の右辺は J について和を取らない)．こうして，S 変換を用いて，$\phi_I(b)$ の作用，すなわちフュージョン係数の行列としての作用を対角化できたことになる．

さらに $N_{0I}{}^K{=}\delta_I^K$ の関係を用いると，(6.50)から $\lambda_I^{(J)}$ を容易に求めることができ，

$$\lambda_I^{(J)} = \frac{S_{IM}}{S_{0M}}, \tag{6.52}$$

を得る．これを(6.50)に代入することにより，

$$\sum_K N_{IJ}{}^K S_{KM} = \frac{S_{JM}S_{IM}}{S_{0M}}, \qquad (M \text{ について和は取らない}) \tag{6.53}$$

を得る．あるいは両辺に S_{ML} を掛けて M について足し上げることにより，

$$\begin{aligned} N_{IJL} &= \sum_M \frac{S_{JM}S_{IM}S_{ML}}{S_{0M}} \\ &= \sum_M \frac{S_{IM}S_{JM}S_{LM}}{S_{0M}}, \end{aligned} \tag{6.54}$$

が得られる．2 行目では定義によってフュージョン係数 N_{IJK} が添え字について完全対称である事実を用いた．(6.53)または(6.54)を**フェアリンデ公式**と呼び，有理共形場理論においてフュージョン規則をモジュラー変換と結び付ける著しい結果である．上の証明において，**有理共形場理論においては**モジュラー変換係数 S_{IJ} が対称行列であることが同時に証明されたことに注意しよう[*8]．

フェアリンデ公式の具体例を見てみよう．

---

*8 この事実は，一般に有理共形場理論でなければ成立しない．たとえば，$\mathcal{N}=4$ の超共形場理論の指標の S 変換行列は対称行列にはならないことが知られている(7.4 節を参照)．

例 1　$SU(2)$-WZW 模型

既に解説したように，レベル k の $SU(2)$-WZW 模型においては，カレント代数に対するプライマリー場は可積分表現に属するスピン $j\equiv\frac{\ell}{2}$, $(\ell=0,1,\cdots,k)$ でラベルされ，モジュラー変換係数は(6.32)で与えられる．これをフェアリンデ公式(6.53)に代入して計算すると，フュージョン規則として，

$$[\phi_{j_1}]\times[\phi_{j_2}]\cong\sum_{j=|j_1-j_2|,\,j+j_1+j_2\in\mathbb{Z}}^{\min\{j_1+j_2,\,k-j_1-j_2\}}[\phi_j], \tag{6.55}$$

が得られる．(6.55)は $SU(2)$ のクレブシュ・ゴルダン規則とよく似ているが，右辺に現れる表現はより制限されていることに注意しよう．このフュージョン規則に J_0^3 電荷の保存則を合わせると，ワード・高橋恒等式から導出した3点関数の選択則(4.37)が再現される．

例 2　ユニタリ・ミニマル模型

ユニタリ・ミニマル模型は，中心電荷 $c=1-\frac{6}{m(m+1)}$, $(m=3,4,5,\cdots)$ を持ち，プライマリー場のスペクトルは，

$$\phi_{(r,s)}\left(\equiv\phi_{(m-r,m+1-s)}\right),\quad 1\le s\le r\le m-1,$$
$$h_{r,s}=\frac{\{(m+1)r-ms\}^2-1}{4m(m+1)},$$

と与えられていた．ここで，(6.39)で与えられているように，overall の位相因子を除き，プライマリー場 $\phi_{(r,s)}$ のモジュラー変換係数は，$SU(2)_{m-2}\otimes SU(2)_{m-1}$ のものと同一であるという事実を思い出そう．したがって，フェアリンデ公式(6.53)を適用すると，フュージョン係数は $SU(2)_{m-2}$ と $SU(2)_{m-1}$ のものを掛け合わせたものとなる．すなわち，ユニタリ・ミニマル模型のフュージョン規則は次のように書かれる；

$$[\phi_{(r,s)}]\times[\phi_{(r',s')}] \cong \sum_{\substack{k=1+|r-r'| \\ k+r+r'\equiv 1 \pmod 2}}^{k_{\max}} \sum_{\substack{\ell=1+|s-s'| \\ \ell+s+s'\equiv 1 \pmod 2}}^{\ell_{\max}} [\phi_{(k,\ell)}], \tag{6.56}$$

$$k_{\max} \equiv \min\left\{r+r'-1,\, 2m-1-r-r'\right\},$$
$$\ell_{\max} \equiv \min\left\{s+s'-1,\, 2m+1-s-s'\right\}.$$

コメント

カーディー状態 ここで，フェアリンデ公式の重要な応用例についてコメントしよう．一般の有理共形場理論において，5.3.2 項で議論した境界状態の自然な拡張が構成できることが知られており [56]，**石橋状態**と呼ばれる．石橋状態はカイラル代数の不変性を保ち，すなわち(5.134)をカイラル代数にまで拡張した拘束条件の(本質的に一意な)解となっており，

$$\langle\langle J'|\, e^{-\pi s\left(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12}\right)}\,|J\rangle\rangle = \delta_{J'J^*}\,\chi_J(is) \tag{6.57}$$

という関係式で特徴付けられる．ここで，$|J\rangle\rangle$ がカイラル代数の表現 J でラベルされる石橋状態であり，$\chi_J(\tau)$ はカイラル代数の指標である．このとき，**カーディー状態** $|I\rangle$ を，S 変換の変換係数 S_{IJ} を用いて，

$$|I\rangle \equiv \sum_J \frac{S_{IJ}}{\sqrt{S_{0J}}}\,|J\rangle\rangle, \tag{6.58}$$

と定義する([57]，やはり 0 は真空表現を表す)．すると，フェアリンデ公式(6.53)からただちにカーディー状態の overlap は計算することができ，

$$\begin{aligned}\langle I|e^{-\pi s\left(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12}\right)}|J\rangle &= \sum_L\sum_K N_{IJ}{}^K S_{KL}\,\chi_L(is) \\ &= \sum_K N_{IJ}{}^K\,\chi_K(it).\end{aligned} \tag{6.59}$$

ここで，5.3.2 項と同様，$t\equiv\dfrac{1}{s}$ は開弦 1 ループのチャンネルにおけるシリンダーのモジュライである．フュージョン係数 $N_{IJ}{}^K$ は非負整数であるから，(6.59)の 2 行目は確かに開弦 1 ループの振幅として解釈できる．

カーディーはこのように境界付きの世界面上の共形場理論における整合性の観点から，フェアリンデ公式に新しい物理的解釈を与えた [57]．現在では，カーディー状態は，一般の有理共形場理論において「D-ブレーン」を記述するための基本的なツールと考えられている．

6.4 コセット構成

有理共形場理論の代表例として，共形場理論の**コセット構成** [58] によって定義される多数の模型が存在する．これはリー群 G とその部分群 H に対し，カレント代数を用いて共形場理論を系統的に構成する方法であり，$\widehat{G}/\widehat{H}$，あるいはレベルを明示する場合は，$\widehat{G}_k/\widehat{H}_{k_H}$ などの記号で表される．コセット構成は多少抽象的ではあるが，

- あらわにユニタリな理論が構成できる．
- あらわにモジュラー不変な理論が構成できる．

などの優れた特徴を持つため共形場理論の分類等に威力を発揮する．

6.4.1 $(\widehat{SU}(2)_k \times \widehat{SU}(2)_1)/\widehat{SU}(2)_{k+1}$-対角型コセット模型：ユニタリ・ミニマル模型

今 $\{J^a_{(k)}(z)\}$ をレベル k の $SU(2)$ カレント代数 $\widehat{SU}(2)_k$ としよう．すなわち，カレント $J^a_{(k)}(z)$ は OPE (3.26) を満たす．今 $\widehat{G} \equiv \widehat{SU}(2)_k \times \widehat{SU}(2)_1$ とおき，$\widehat{G}$ に対角的に埋め込まれた部分代数 $\widehat{H}$ を考える．すなわち，$\widehat{G}$ は 2 組の独立な $SU(2)$ カレント $J^a_{(k)}$，$J^a_{(1)}$ によって生成され，一方，部分代数 $\widehat{H}$ は，$J^a_{(k)}$ と $J^a_{(1)}$ の和として与えられる；

$$J^a_{\mathrm{tot}}(z) \equiv J^a_{(k)}(z) + J^a_{(1)}(z). \tag{6.60}$$

$J^a_{(k)}(z)J^b_{(1)}(w) \sim 0$ なので，容易に確かめられるように，J^a_{tot} はレベル $k+1$ の $SU(2)$ カレント代数を生成している．したがって，$\widehat{H} \cong \widehat{SU}(2)_{k+1}$, と同定される．

さて，$\widehat{G}$，$\widehat{H}$ それぞれに対する菅原構成のエネルギー・運動量テンソルを T_G，T_H とし，

$$T_{G/H} \equiv T_G - T_H, \tag{6.61}$$

とおく．あらわに書くと，

$$T_G(z) \equiv \frac{1}{k+2}\sum_{a=1}^{3} :J^a_{(k)}(z)J^a_{(k)}(z): + \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{3} :J^a_{(1)}(z)J^a_{(1)}(z):,$$

$$T_H(z) \equiv \frac{1}{k+3}\sum_{a=1}^{3} :J^a_{\mathrm{tot}}(z)J^a_{\mathrm{tot}}(z): \tag{6.62}$$

であり，それぞれ中心電荷

$$c_G \equiv c(SU(2),k)+c(SU(2),1) = \frac{3k}{k+2}+1, \tag{6.63}$$

$$c_H \equiv c(SU(2),k+1) = \frac{3(k+1)}{k+3}, \tag{6.64}$$

を持つ．

コセット構成に関する基本的な事実を述べよう；

（i） $T_{G/H}$ は $\widehat{H}$ の全てのカレントと可換である．すなわち，

$$T_{G/H}(z)J^a_{\mathrm{tot}}(w) \sim 0, \quad ({}^\forall a), \tag{6.65}$$

が成り立つ．

（ii） $T_{G/H}$ と T_H は可換である．すなわち，

$$T_{G/H}(z)T_H(w) \sim 0. \tag{6.66}$$

（iii） $T_{G/H}$ はビラソロ代数を生成し，中心電荷は

$$\begin{aligned} c_{G/H} &\equiv c_G - c_H = c(SU(2),k)+c(SU(2),1)-c(SU(2),1) \\ &= \frac{3k}{k+2}+1-\frac{3(k+1)}{k+3} = 1-\frac{6}{(k+2)(k+3)} \end{aligned} \tag{6.67}$$

に等しい．すなわち，$T_{G/H}(z)$ は OPE

$$T_{G/H}(z)T_{G/H}(w) \sim \frac{\frac{c_{G/H}}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T_{G/H}(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w T_{G/H}(w), \tag{6.68}$$

を満たす.

証明はやさしい. まず, T_H はカレント $J^a_{\rm tot}$ から菅原構成されているので, $J^a_{\rm tot}$ との間に(3.79)の形の OPE を持つ. さらに $J^a_{\rm tot}$ はカレント代数 $\widehat{G}$ の一部であるから, やはり T_G と(3.79)の OPE を持つ. こうして, カレント $J^a_{\rm tot}$ は, T_G と T_H に対し全く同じ OPE を持つので, $T_{G/H} \equiv T_G - T_H$ とは特異的な OPE を持たないことがわかり, (i)が成立する. (ii)は T_H がカレント $J^a_{\rm tot}$ から菅原構成されているので(i)からただちに従う. (iii)は(ii)より,

$$T_G(z)T_G(w) \sim T_H(z)T_H(w) + T_{G/H}(z)T_{G/H}(w)$$

が成り立ち, T_G, T_H はそれぞれ中心電荷 c_G, c_H のビラソロ代数を生成することから導かれる.

こうして中心電荷 $c_{G/H}$ (6.67)のビラソロ代数を持つ新たな共形場理論が構成される. これを **G, H に対するコセット構成**あるいは**コセット CFT** と呼び, $\widehat{G}/\widehat{H}$, あるいは,

$$\frac{\widehat{SU}(2)_k \times \widehat{SU}(2)_1}{\widehat{SU}(2)_{k+1}}, \tag{6.69}$$

と表す. $T_{G/H}$ が生成するビラソロ代数の表現空間はカレント代数 $\widehat{G} = \widehat{SU(2)}_k \times \widehat{SU(2)}_1$ の可積分表現を $\widehat{H} = \widehat{SU(2)}_{k+1}$ で既約分解することによって定義される；

$$L^{SU(2)}(\ell, k) \otimes L^{SU(2)}(t, 1) = \bigoplus_{\ell'=0, \ell+t-\ell' \in 2\mathbb{Z}}^{k+1} V^{G/H}_{[\ell,\ell']} \otimes L^{SU(2)}(\ell', k+1). \tag{6.70}$$

ここで, $L^{SU(2)}(\ell, k)$ は $\widehat{SU}(2)$ のスピン $\dfrac{\ell}{2}$, レベル k の可積分表現($\ell = 0, 1, \dots, k$)であり, $V^{G/H}_{[\ell,\ell']}$ が求める $T_{G/H}$ の表現空間である. 条件 $\ell + t - \ell' \in 2\mathbb{Z}$ は通常の $SU(2)$ のクレブシュ・ゴルダン規則から導かれる. 4.1 節で解説したように可積分表現はユニタリであるから, ビラソロ代数の表現 $V^{G/H}_{[\ell,\ell']}$ も必然的にユニタリとなる. このようにコセット構成では模型のユニタリ性が自動的に保証される点が重要である.

中心電荷の公式(6.67)は, $m \equiv k+2$ のもとでユニタリ・ミニマル模型の中心

電荷(2.33)に等しいことがわかる．実際にコセット模型(6.69)はユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_m$ と等価であることが知られている．この事実を示す最も簡単な方法は，表現の指標を調べることである．コセット CFT の指標は，

$$\chi^{G/H}_{[\ell,\ell']}(\tau) \equiv \mathrm{Tr}_{V^{G/H}_{[\ell,\ell']}}\left[q^{L_0^{G/H}-\frac{c_{G/H}}{24}}\right], \tag{6.71}$$

と定義される．$L_0^{G/H}$ はエネルギー・運動量テンソル $T_{G/H}$ の L_0 演算子である．直和分解(6.70)の両辺のトレースを取ることにより，ただちに指標の「分岐関係式」；

$$\chi^{SU(2)}_{\ell,k}(\tau)\chi^{SU(2)}_{t,1}(\tau) = \sum_{\ell'=0,\ell+t-\ell'\in 2\mathbb{Z}}^{k+1} \chi^{G/H}_{[\ell,\ell']}(\tau)\,\chi^{SU(2)}_{\ell',k+1}(\tau), \tag{6.72}$$

が得られる．これと $\widehat{SU}(2)$ の指標公式(4.15)，(4.17)を用い，テータ関数の積公式(A.19)を用いて少し計算すると，

$$\begin{aligned}\chi^{G/H}_{[\ell,\ell']}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)}&\left\{\Theta_{(k+3)(\ell+1)-(k+2)(\ell'+1),(k+2)(k+3)}(\tau)\right.\\ &\left.-\Theta_{(k+3)(\ell+1)+(k+2)(\ell'+1),(k+2)(k+3)}(\tau)\right\},\end{aligned} \tag{6.73}$$

が得られる．すなわちパラメータの同定

$$m = k+2, \quad r = \ell+1, \quad s = \ell'+1,$$

のもとで，(6.73)はユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_m$ の指標(2.35)と一致することがわかる．この計算は読者の練習問題としよう．

ここで指標(6.73)は，対称性

$$\chi^{G/H}_{[k-\ell,k+1-\ell']}(\tau) = \chi^{G/H}_{[\ell,\ell']}(\tau), \tag{6.74}$$

を持つことに注意しよう．この事実は既に 2.5 節で述べた「場の同一視」(field identification)である．4.3.4 項で解説したようにカレント代数はスペクトラル・フローと呼ばれる自己同型を持ち，それがコセット構成におけるプライマリー場の同一視の起源である．この点については後でもう少し詳しく述べよう．

より一般的な $SU(2)$ の対角型コセット模型として

$$\frac{\widehat{SU}(2)_{k_1}\times\widehat{SU}(2)_{k_2}}{\widehat{SU}(2)_{k_1+k_2}}$$

を考えることができ，中心電荷

$$c^{G/H}=\frac{3k_1}{k_1+2}+\frac{3k_2}{k_2+2}-\frac{3(k_1+k_2)}{k_1+k_2+2}, \tag{6.75}$$

の共形場理論を与える．応用上特に重要なのは，上で解説した $k_2=1$ (ユニタリ・ミニマル模型)の場合に加え，$k_2=2$ の場合；

$$\mathcal{M}_m^{\mathcal{N}=1}\cong\frac{\widehat{SU}(2)_k\times\widehat{SU}(2)_2}{\widehat{SU}(2)_{k+2}}, \quad m\equiv k+2, \tag{6.76}$$

である．このコセット模型は代表的な $\mathcal{N}=1$ 超共形場理論であり，「$\mathcal{N}=1$ のユニタリ・ミニマル模型」と呼ばれる [58]．この模型は中心電荷：

$$c=\frac{3}{2}-\frac{12}{m(m+2)}, \quad (m\geq 2) \tag{6.77}$$

を持つ(確かめてみよ)．この模型については 7.1.3 項で詳しく解説する．

いくつか重要なコメントをしておこう；

コメント　**コセット CFT における共形代数について**　コセット構成においては，$\widehat{G}/\widehat{H}$ の共形代数は，$\widehat{G}$ の普遍包絡代数(universal enveloping algebra)*9において $\widehat{H}$ と可換な元によって生成され，一般には $T_{G/H}$ が生成するビラソロ代数を拡大した共形代数(カイラル代数)となる．一番簡単な対角型コセット $\dfrac{\widehat{SU}(2)_k\times\widehat{SU}(2)_1}{\widehat{SU}(2)_{k+1}}$ では共形代数はビラソロ代数そのものであるが，$k_2\geq 2$ では一般にビラソロ代数を拡大した共形代数を持つ．上で述べた $k_2=2$ の場合は，$\mathcal{N}=1$ の超対称ビラソロ代数を持ち，さらに $k_2\geq 3$ の場合は非線形なカイラル代数(「W 代数」と呼ばれる)を持つことが知られている [59]．

---

*9　一般にリー代数の表現をひとつ定めると，リー代数の元を演算子とみなして積を考えることができる．表現の選び方によらずに，$XY-YX=[X,Y]$ となるように抽象的にリー代数を拡大した代数を普遍包絡代数と呼ぶ．たとえば $SU(n)$ などの古典単純リー代数に対しては，行列の積による代数そのものと考えればよい．

コメント

コセット CFT のモジュラー不変性　一般に $\widehat{G}/\widehat{H}$ コセット構成の場合，分岐関係式：

$$\chi_I^G = \sum_i \chi_{[I,i]}^{G/H}\, \chi_i^H \tag{6.78}$$

を用いて指標 $\chi_{[I,i]}^{G/H}$ が定義される．ここで χ_I^G，χ_i^H はそれぞれカレント代数 $\widehat{G}$，及び $\widehat{H}$ の指標である．そして χ_I^G，χ_i^H の S 変換公式が，

$$\begin{aligned}\chi_I^G|_S &= \sum_{I'} S_{I,I'}^G\, \chi_{I'}^G,\\ \chi_i^H|_S &= \sum_{i'} S_{i,i'}^H\, \chi_{i'}^H,\end{aligned} \tag{6.79}$$

と与えられるとき，コセット指標 $\chi_{[I,i]}$ の S 変換公式は，

$$\chi_{[I,i]}^{G/H}\Big|_S = \sum_{I',i'} S_{I,I'}^G \left(S^H\right)_{i,i'}^{-1} \chi_{[I',i']}^{G/H} \tag{6.80}$$

と与えられる．$SU(2)$ の対角型コセット(6.69)を考えると，ユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_m$ の指標のモジュラー変換公式(6.39)は分岐関係式(6.72)を用いて容易に導くことができる．さらに

$$Z^G(\tau,\bar\tau) = \sum_{I,\tilde I} N_{I\tilde I}^G\, \chi_I^G(\tau)\overline{\chi_{\tilde I}^G(\tau)}, \quad Z^H(\tau,\bar\tau) = \sum_{i,\tilde i} N_{i\tilde i}^H\, \chi_i^H(\tau)\overline{\chi_{\tilde i}^H(\tau)},$$

を $\widehat{G}$，$\widehat{H}$ の任意のモジュラー不変分配関数とするとき，コセット模型 $\widehat{G}/\widehat{H}$ のモジュラー不変分配関数は，

$$Z^{G/H}(\tau,\bar\tau) = \frac{1}{L} \sum_{I,\tilde I,i,\tilde i} N_{I\tilde I}^G\, N_{i\tilde i}^H\, \chi_{[I,i]}^{G/H}(\tau)\overline{\chi_{[\tilde I,\tilde i]}^{G/H}(\tau)}, \tag{6.81}$$

の形を取る．ここで L は一般に正の整数であり，スペクトラル・フローによる場の同一視によってプライマリー場の数え過ぎを取り除く因子である．上の $SU(2)$ の対角型コセット(6.69)の例では L=2 であり，前に解説したユニタリ・ミニマル模型のモジュラー不変分配関数(6.41)を再現する．このように，コセット構成はモジュラー不変な理論を構成する強力なツールを与える．

6.4.2　$\widehat{SU}(2)/\widehat{U}(1)$-コセット模型：パラフェルミオン理論

次の簡単な例として，G=$SU(2)$ とし，H をカルタン部分群($\cong U(1)$)と選ぶ．このとき，

$$T_G(z) = \frac{1}{k+2}\sum_{a=1}^{3} : J^a(z)J^a(z) :, \tag{6.82}$$

$$T_H(z) = \frac{1}{k} : J^3(z)J^3(z) :, \tag{6.83}$$

となる．$T_H \neq \frac{1}{k+2}{:}J^3(z)J^3(z){:}$ であることに注意しよう．実際，

$$J^3(z) = i\sqrt{\frac{k}{2}}\partial X(z),$$

としてカイラル・ボソン $X(z)$ を定義すると，$\widehat{SU}(2)_k$ のカレント代数(3.26)によって，$\partial X(z)\partial X(0) \sim -\frac{1}{z^2}$ が成り立ち，$T_H = -\frac{1}{2}{:}\partial X\partial X{:}$ は，($\alpha'=2$ のもとで)正しく規格化されたエネルギー・運動量テンソルとなる．コセット構成 $\widehat{SU}(2)_k/\widehat{U}(1)$ のエネルギー・運動量テンソルはもちろん $T_{G/H} \equiv T_G - T_H$ で与えられ，中心電荷は，

$$c_{G/H} = c(SU(2), k) - 1 = \frac{3k}{k+2} - 1 = \frac{2(k-1)}{k+2}, \tag{6.84}$$

に等しい．このように定義される共形場理論は大域的な $\mathbb{Z}_k$ 対称性を持つことが知られており，($SU(2)$ の)**$\mathbb{Z}_k$ パラフェルミオン**と呼ばれる [60, 61, 62]．すなわち，この模型ではエネルギー・運動量テンソルに加えて分数スピンを持ったカレントが登場し，(フェルミ統計でもボーズ統計でもない「パラ統計」を持つという意味で)「パラフェルミオン」という名前の由来となっている．具体的にはパラフェルミオン・カレントは，上で導入したボソン $X(z)$ と $\widehat{SU}(2)$ カレントを用いて，

$$(J^+)^\ell = \psi_\ell e^{i\ell\sqrt{\frac{2}{k}}X}, \quad (J^-)^\ell = \psi_\ell^\dagger e^{-i\ell\sqrt{\frac{2}{k}}X}, \qquad (\ell = 0, \cdots, k) \tag{6.85}$$

と定義され，ψ_ℓ，$\psi_\ell^\dagger$ はともに共形ウェイト(スピン) $h = \frac{\ell(k-\ell)}{k}$ を持つ．ここで $\psi_0 = \psi_k = \mathbf{1}$ であり，また同一視 $\psi_\ell^\dagger = \psi_{k-\ell}$ を要請する．さらに，OPE:

$$\psi_\ell(z)\psi_{\ell'}(0) \sim z^{-\frac{2\ell\ell'}{k}}\left[\psi_{\ell+\ell'}(0) + \cdots\right] \tag{6.86}$$

が成立するので，ψ_ℓ は「基本パラフェルミオン・カレント」$\psi_1(z)$ から生成されることになる．(6.86)に典型的に表れているように，分数べきの OPE が現れるのがパラフェルミオン CFT の特徴である．詳細は文献 [60, 61] などを

参照されたい．

(6.85)と同様に，パラフェルミオン CFT のプライマリー場は，$\widehat{SU}(2)_k$ のスピン $\frac{\ell}{2}$ のプライマリー場 $\phi_{\ell,m}(z)$ $(0\le\ell\le k,\ -\ell\le m\le\ell,\ \ell-m\in 2\mathbb{Z})$ を $X(z)$ で分解することで定義される；

$$\phi_{\ell,m}(z)=\phi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(z)e^{im\sqrt{\frac{2}{k}}X(z)}. \tag{6.87}$$

プライマリー場 $\phi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(z)$ の共形次元は容易にわかるように，

$$h=\frac{\ell(\ell+2)}{4(k+2)}-\frac{m^2}{4k} \tag{6.88}$$

に等しい．便宜上，

$$\phi^{\mathrm{PF}}_{k-\ell,m+k}(z)\equiv\phi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(z),\quad \phi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m+2k}(z)\equiv\phi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(z), \tag{6.89}$$

と定義し，$\phi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(z)$ の量子数 m の領域を $m\in\mathbb{Z}_{2k}$ に拡げておくのが便利である．後で議論するように，これはやはり $\widehat{SU}(2)$ のスペクトラル・フローに基づく場の同一視である．ここで，共形ウェイトの公式(6.88)は，「標準領域」(standard range)である $-\ell\le m\le\ell$ に対して適用しなければならない，という点を注意しておく．

k が小さな値の場合の例を述べよう：

<u>$k=1$</u>

このとき，(6.84)は $c=0$ となり，コセット CFT はトリビアルとなる．実際，既に述べたように $\widehat{SU}(2)_1$ は 1 成分の自由ボソン場と等価となり，コセットをとるとダイナミカルな自由度は何も残らない．

<u>$k=2$</u>

このとき，(6.84)は $c=\frac{1}{2}$ となり，コセット CFT は 1 成分のマヨラナ・フェルミオンの理論と等価になる．すなわち，

$$\mathbb{Z}_2\text{パラフェルミオン}\ \cong\ \text{マヨラナ・フェルミオン}$$

であり，この点からも，「パラフェルミオンはフェルミオンの拡張である」

と言うことができる.

$k=3$

このとき, (6.84)は $c=\dfrac{4}{5}$ となり, これは「3 状態ポッツ模型」, すなわちユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_m$ で $m=5$ のモデルに対応する(2.5 節参照). 期待通りこのモデルは $\mathbb{Z}_3$ 対称性を持つことが知られており, 共形ウェイト $h=\dfrac{2}{3}$ のプライマリー場が基本パラフェルミオン・カレント $\psi_1(z)$ に相当している. なおユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_5$ のすべてのプライマリー場がパラフェルミオン・モデルに登場するわけではなく, モジュラー不変分配関数は非自明である(本項最後の「コメント」を参照).

パラフェルミオン $\widehat{SU}(2)_k/\widehat{U}(1)$ のヒルベルト空間は, やはり $\widehat{SU}(2)_k$ の可積分表現を $\widehat{U}(1)$ の表現(=コンパクト・ボソン $X(z)$)で分解することによって得られる. そこで J_0^3 のスペクトルを考えてみると, プライマリー場 $\phi_{\ell,m}$ に対して,

$$J_0^3 = \frac{m}{2}+kn, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.90}$$

となり, 対応する $\widehat{U}(1)$ の表現空間を $V_m^{U(1)}$ と書くことにする($V_m^{U(1)}$ は ℓ には依存していないことに注意). ここで kn のシフトは $\widehat{SU}(2)$ のアフィン・ワイル群の作用に相当する. したがって, $\widehat{U}(1)$ の指標は, $L_0^{U(1)}=\dfrac{1}{k}(J_0^3)^2+\cdots$ に注意して,

$$\begin{aligned}\chi_m(\tau,z) &\equiv \mathrm{Tr}_{V_m^{U(1)}}\left[q^{L_0^{U(1)}-\frac{1}{24}}e^{2\pi i z J_0^3}\right] = \frac{1}{\eta(\tau)}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4k}(m+2kn)^2}e^{2\pi i z\left(\frac{m}{2}+kn\right)} \\ &= \frac{\Theta_{m,k}(\tau,z)}{\eta(\tau)},\end{aligned} \tag{6.91}$$

となる. ここで $1/\eta(\tau)$ の因子は J^3 のボソンの振動子モードの足し上げの寄与である. 5.2.4 項の議論と比較すると, $X(z)$ は半径 $R=\sqrt{\alpha' k}\equiv\sqrt{2k}$ のコンパクト・ボソンであることがわかる. さて, プライマリー場 $\phi_{\ell,m}^{\mathrm{PF}}$ に対するパラフェルミオン代数の表現空間は, 直和分解

$$L^{SU(2)}(\ell,k) = \bigoplus_{\substack{m\in\mathbb{Z}_{2k}\\ \ell+m\in 2\mathbb{Z}}} V^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}\otimes V^{U(1)}_m, \tag{6.92}$$

を用いて定義される((6.89)を用いていることに注意). したがって, コセット指標 $\chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(\tau)$ は, 指標の分解

$$\chi^{SU(2)}_{\ell,k}(\tau,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} \chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(\tau)\,\frac{\Theta_{m,k}(\tau,z)}{\eta(\tau)}, \tag{6.93}$$

によって求められる. ここで, $\ell+m\in 2\mathbb{Z}+1$ のときは,

$$\chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(\tau) \equiv 0, \tag{6.94}$$

であることに注意. 数学の文献では $\widehat{SU}(2)_k$ の**ストリング関数** $c^{(k)}_{\ell,m}(\tau)$ が,

$$\chi^{SU(2)}_{\ell,k}(\tau,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} c^{(k)}_{\ell,m}(\tau)\Theta_{m,k}(\tau,z), \tag{6.95}$$

によって定義されるので [10],

$$\chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(\tau) = \eta(\tau)c^{(k)}_{\ell,m}(\tau), \tag{6.96}$$

が成り立つ. あらわに計算すると, ストリング関数は,

$$c^{(k)}_{\ell,m}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)^3}\sum_{(x,y)} \mathrm{sgn}(x)\, q^{(k+2)x^2-ky^2} \tag{6.97}$$

と書くことができる. ただし, (x,y) の和は,

$$(x,y) \text{ または } \left(\frac{1}{2}-x,\frac{1}{2}+y\right) \in \left(\frac{l+1}{2(k+2)}+\mathbb{Z},\frac{m}{2k}+\mathbb{Z}\right),\quad -|x|\le y\le |x|,$$

の領域において取る.

ところで, 場の同一視(6.89)が矛盾なく実行できるためには, 指標の恒等式

$$\chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m+2k}(\tau) = \chi^{\mathrm{PF}}_{k-\ell,m+k}(\tau) = \chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(\tau), \tag{6.98}$$

が成立しなければならない. 実際に $\widehat{SU}(2)$ のスペクトラル・フロー対称性に基づき, この恒等式が成立することが示される. 言い換えれば,

$$c^{(k)}_{\ell,m+2k}(\tau) = c^{(k)}_{k-\ell,m+k}(\tau) = c^{(k)}_{\ell,m}(\tau) \tag{6.99}$$

が成立する.

指標 $\chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(\tau)$ のモジュラー S 変換による変換性は, (6.80)と分岐関係式(6.93)から簡単に読み取ることができる. すなわち,

$$\chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(\tau)|_S = \sum_{\ell'=0}^{k} \sum_{m'\in\mathbb{Z}_{2k}} S^{(k)}_{\ell,\ell'}\, M^{(2k)\,*}_{m,m'}\, \chi^{\mathrm{PF}}_{\ell',m'}(\tau), \tag{6.100}$$

$$S^{(k)}_{\ell,\ell'} \equiv \sqrt{\frac{2}{k+2}}\sin\left(\frac{\pi(\ell+1)(\ell'+1)}{k+2}\right),\quad M^{(k)}_{m,m'} \equiv \frac{1}{\sqrt{2k}}e^{-2\pi i\frac{mm'}{2k}}. \tag{6.101}$$

またモジュラー不変分配関数は, 5章で解説したレベル k の $SU(2)$-WZW 模型, 及び, $\widehat{U}(1)$ の部分(半径 $\sqrt{\alpha' k}$ のコンパクト・ボソン)のモジュラー不変分配関数を用いて, 公式(6.81)から構成することができる. 最も単純な対角型モジュラー不変分配関数は,

$$Z^{\mathrm{PF}}(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{k}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2k}} \left|\chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}(\tau)\right|^2, \tag{6.102}$$

と与えられる. この場合もスペクトラル・フローによる場の同一視は $\mathbb{Z}_2$ 対称性として働くので $L=2$ である.

コメント **3状態ポッツ模型のモジュラー不変分配関数について** $k=3$ のパラフェルミオン模型の対角型モジュラー不変分配関数(6.102)は, $\mathcal{M}_5$ の対角型モジュラー不変分配関数ではない. 指標の対応は次のようになる ($\chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,m}=\chi^{\mathrm{PF}}_{\ell,-m}(\tau)=\chi^{\mathrm{PF}}_{3-\ell,m+3}(\tau)$);

$$\chi^{\mathrm{PF}}_{0,0}(\tau) = \chi_0(\tau)+\chi_3(\tau),\quad \chi^{\mathrm{PF}}_{2,0}(\tau) = \chi_{\frac{2}{5}}(\tau)+\chi_{\frac{7}{5}}(\tau),$$
$$\chi^{\mathrm{PF}}_{0,2}(\tau) = \chi_{\frac{2}{3}}(\tau),\quad \chi^{\mathrm{PF}}_{2,2}(\tau) = \chi_{\frac{1}{15}}(\tau).$$

ここで $\chi_h(\tau)$ は $\mathcal{M}_5$ の共形ウェイト h の指標を表す. この関係から $k=3$ のパラフェルミオンの対角型モジュラー不変分配関数(6.102)は, $\mathcal{M}_5$ の指標を用いて

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = |\chi_0+\chi_3|^2+\left|\chi_{\frac{2}{5}}+\chi_{\frac{7}{5}}\right|^2+2\left|\chi_{\frac{2}{3}}\right|^2+2\left|\chi_{\frac{1}{15}}\right|^2, \tag{6.103}$$

と書き直せる. これは $\mathcal{M}_5$ の (A_4, D_4) タイプのモジュラー不変分配関数である*10. 実はこの分配関数(6.103)が, 3状態ポッツ模型の臨界現象を正しく記述するモジュラー不変分配関数となっていることが知られている [43].

---

*10 表6.2参照. なお $\mathcal{M}_5$ のプライマリー状態 (r,s) のうち, 偶数の s を持つ状態はパラフェルミオン模型には登場していないことがわかる.

6.4.3　一般のコセット模型：G, H が単純リー群の場合

もう少し非自明な例として，G が一般の単純リー群の場合を考察しよう．G を単純リー群，$\mathfrak{g}$ を G のリー代数，G のレベル k のカレント代数を $\widehat{G}_k$ とする．θ を $\mathfrak{g}$ の最高ルートとし，例によってカルタン・キリング内積 $(\ ,\ )$ を $(\theta,\theta)=2$ と規格化する．基底 $\{T^A\}_{A=1,\cdots,\dim G}$ に対し，$\widehat{G}_k$ は，

$$J^A(z)J^B(w) \sim \frac{if^{AB}{}_C J^C(w)}{z-w} + \frac{k\eta^{AB}}{(z-w)^2}, \quad (J^A \equiv (T^A, J)) \tag{6.104}$$

と表される．ただし，

$$\eta^{AB} \equiv (T^A, T^B), \quad [T^A, T^B] = if^{AB}{}_C T^C, \tag{6.105}$$

とおき，後の便宜のため(6.104)を基底の選び方によらない形に書いておいた．

さて，G の部分群 H を取り，H のリー代数を $\mathfrak{h}$，対応するカレント代数を $\widehat{H}$ としよう．ここでは簡単のために H も単純リー群であると仮定する．θ_H を $\mathfrak{h}$ の最高ルートとし，$(\ ,\ )_H$ を $(\theta_H,\theta_H)_H=2$ と規格化された $\mathfrak{h}$ のカルタン・キリング内積であるとする．一般に $(\ ,\ )$ を $\mathfrak{h}$ に制限して得られる内積と $(\ ,\ )_H$ とは規格化が異なる点に注意しよう．$\iota: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ を埋め込み写像とするとき，

$$(\iota(u), \iota(v)) = x_e(u,v)_H, \quad ({}^\forall u, v \in \mathfrak{h}), \tag{6.106}$$

によって定義される規格化を補正する因子 x_e のことを埋め込み ι の**埋め込み指数**(embedding index)と呼ぶ．$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$ のカルタン部分代数をそれぞれ $\mathfrak{t}$，$\mathfrak{t}_\mathfrak{h}$ とすると，双対空間 $\mathfrak{t}^*$, $\mathfrak{t}_\mathfrak{h}^*$ の内積に対しては逆数の補正 x_e^{-1} が掛かることに注意すると，

$$(\theta_H, \theta_H) = x_e^{-1}(\theta_H, \theta_H)_H = \frac{2}{x_e}$$

が成り立つので，

$$x_e = \frac{2}{(\theta_H, \theta_H)}, \tag{6.107}$$

となることがわかる．ただし，ここで θ_H を埋め込み ι を用いて $\mathfrak{t}^*$ の元と同一視している．

$\mathfrak{h}$ の基底 $\{t^a\}_{a=1,\cdots,\dim H}$ に対し，カレント代数 $\widehat{G}_k$ と埋め込み ι によって定まる H のカレント代数 $\widehat{H}$ は $J^a_{(H)}\equiv(\iota(t^a),J)$ と定義され，

$$J^a_{(H)}(z)J^b_{(H)}(w)\sim\frac{i\widetilde{f}^{ab}{}_cJ^c_{(H)}(w)}{z-w}+\frac{k_H\eta^{ab}_{(H)}}{(z-w)^2},\tag{6.108}$$

$$\eta^{ab}_{(H)}\equiv(t^a,t^b)_H,\quad [t^a,t^b]=i\widetilde{f}^{ab}{}_ct^c,\tag{6.109}$$

という OPE を満たす．ここで，(6.104)と(6.108)のシュウインガー項を比較することにより，レベル k_H は $\widehat{G}$ のレベル k と

$$k_H=x_ek,\tag{6.110}$$

の関係にあることがわかる．$k_H=k$ とは限らないことに注意．

$\widehat{G}_k$，$\widehat{H}_{k_H}$ それぞれに対する菅原構成のエネルギー・運動量テンソルを T_G，T_H とする．すなわち，(和の規則を用い)

$$T_G(z)=\frac{\eta_{AB}:J^A(z)J^B(z):}{2(k+h^\vee_G)},\quad T_H(z)=\frac{\eta_{(H)\,ab}:J^a_{(H)}(z)J^b_{(H)}(z):}{2(k_H+h^\vee_H)},$$
$$(\eta_{AB}\eta^{BC}=\delta^C_A,\ \ \eta_{(H)\,ab}\eta^{bc}_{(H)}=\delta^c_a),\tag{6.111}$$

とし，

$$T_{G/H}\equiv T_G-T_H,\tag{6.112}$$

と定義する．前と同様に次の事実が成立する：

(i) $T_{G/H}$ はカレント代数 $\widehat{H}_{k_H}$ の全ての演算子と可換である．すなわち，

$$T_{G/H}(z)J^a_{(H)}(w)\sim 0,\quad ({}^\forall a),\tag{6.113}$$

が成り立つ．

(ii) $T_{G/H}$ と T_H は可換である．すなわち，

$$T_{G/H}(z)T_H(w)\sim 0.\tag{6.114}$$

(iii) $T_{G/H}$ はビラソロ代数を生成し，中心電荷は

$$c_{G/H} \equiv c(G,k)-c(H,k_H) = \frac{k\dim G}{k+h_G^\vee}-\frac{k_H\dim H}{k_H+h_H^\vee}, \tag{6.115}$$

に等しい.

こうして $SU(2)$ の場合と同様にコセット CFT $\widehat{G}/\widehat{H}$ が定義される. 先にコメントしたように, これらの模型は一般にビラソロ代数を拡大した共形代数を持ち, その表現空間は $\widehat{G}$ の可積分表現を $\widehat{H}$ の可積分表現で直和分解することによって定義される;

$$L^G(\widehat{\Lambda}) = \bigoplus_{\widehat{\lambda}\in \widehat{P}^{(H)}_{+,k_H}} V^{G/H}_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]}\otimes L^H(\widehat{\lambda}). \tag{6.116}$$

ここで, $L^G(\widehat{\Lambda})$ はアフィン・ウェイト $\widehat{\Lambda}\equiv\Lambda+k\widehat{\Lambda}_0$ を最高ウェイトとする $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現, 同様に $L^H(\widehat{\lambda})$ を $\widehat{\lambda}\equiv\lambda+k_H\widehat{\Lambda}_0^{(H)}$ を持つ $\widehat{\mathfrak{h}}$ の可積分表現とする. $\widehat{P}^{(H)}_{+,k_H}$ は $\widehat{H}$ のレベル k_H の非負ウェイトの集合である;

$$\widehat{P}^{(H)}_{+,k_H} \equiv \left\{\widehat{\lambda} = \lambda+k_H\widehat{\Lambda}_0^{(H)},\ \mathrm{mod}\ \mathbb{C}\delta\ :\ (\lambda,\theta_H)_H \le k_H\right\}. \tag{6.117}$$

そして, $V^{G/H}_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]}$ が求めるコセット CFT の共形代数の表現空間である. 既に述べたように可積分表現 $L^G(\widehat{\Lambda})$, $L^H(\widehat{\lambda})$ はユニタリなので, $V^{G/H}_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]}$ も明白にユニタリ表現となる. $V^{G/H}_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]}$ のプライマリー状態は直和分解(6.116)から同定され, その共形次元は,

$$\begin{aligned} h_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]} &= h^G(\Lambda,k)-h^H(\lambda,k_H)+n \\ &\equiv \frac{(\Lambda,\Lambda+2\rho_G)}{2(k+h_G^\vee)}-\frac{(\lambda,\lambda+2\rho_H)}{2(k_H+h_H^\vee)}+n, \end{aligned} \tag{6.118}$$

となる. n は非負の整数値であり, 表現のユニタリ性から必ず $h_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]}\ge 0$ となる.

コセット CFT の指標は,

$$\chi^{G/H}_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]}(\tau) \equiv \mathrm{Tr}_{V_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]}}\left[q^{L_0^{G/H}-\frac{c_{G/H}}{24}}\right], \tag{6.119}$$

と定義される. $L_0^{G/H}\equiv L_0^G-L_0^H$ はエネルギー・運動量テンソル $T_{G/H}$ の L_0

演算子である．前節と全く同様に直和分解(6.116)より分岐関係式

$$\chi^{G}_{\widehat{\Lambda}}(\tau) = \sum_{\widehat{\lambda}\in\widehat{P}^{(H)}_{+,k_H}} \chi^{G/H}_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]}(\tau)\,\chi^{H}_{\widehat{\lambda}}(\tau), \tag{6.120}$$

が従う．ここで $\chi^{G}_{\widehat{\Lambda}}(\tau)$，$\chi^{H}_{\widehat{\lambda}}(\tau)$ は $\widehat{G}$，$\widehat{H}$ の指標(4.119)である($z_i{=}u{=}0$ とおいたもの)．既に述べたように，これよりコセット指標 $\chi^{G/H}_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]}(\tau)$ のモジュラー変換性を調べることができ，(6.81)に基づいてモジュラー不変分配関数を構成することができる．

しかしながら，少々非自明なのはプライマリー場の同一視の問題である[63]．そのことを述べるために，4.3.4 項の記号を用いることとし，$\widetilde{W}_0$, $\widetilde{W}_0^{(H)}$ をそれぞれ $\widehat{G}$，$\widehat{H}$ に対して(4.129)によって定義される自己同型群とする．4.3.4 項で解説したように，これらはアフィン・ワイル群の作用を除きスペクトラル・フロー変換で表される．コセット CFT $\widehat{G}/\widehat{H}$ はさらにカレント代数 $\widehat{H}'$ の対称性を持つとする．前節で述べた $\widehat{SU}(2)$-コセット模型のケースは $\widehat{H}'{=}\{0\}$ となっているが，一般のコセット模型では非自明な $\widehat{H}'$ を持つことがあり得る*11．このときコセット CFT $\widehat{G}/\widehat{H}$ のプライマリー場の同一視は，有限位数の離散変換群：

$$\mathcal{S}_{G/H} \equiv \left\{(\sigma,\sigma_H)\in\widetilde{W}_0\times\widetilde{W}_0^{(H)}\ :\ \iota\circ\sigma_H=\sigma\circ\iota,\ \sigma(u)=u,\ ({}^{\forall}u\in\widehat{H}')\right\}, \tag{6.121}$$

の元の作用によって与えられる．ここで $\iota{:}\widehat{H}\to\widehat{G}$ は埋め込み写像である．すなわち，$\widehat{G}/\widehat{H}$ のプライマリー場 $\Phi_{\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}}$ ($\widehat{\Lambda}{\in}\widehat{P}_{+,k}$, $\widehat{\lambda}{\in}\widehat{P}^{(H)}_{+,k_H}$) に対し，

$$\Phi_{\sigma(\widehat{\Lambda}),\sigma_H(\widehat{\lambda})}=\Phi_{\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}},\quad ({}^{\forall}(\sigma,\sigma_H)\in\mathcal{S}_{G/H}),$$

を要請するのである．対応する指標の恒等式：

$$\chi^{G/H}_{[\sigma(\widehat{\Lambda}),\sigma_H(\widehat{\lambda})]}(\tau)=\chi^{G/H}_{[\widehat{\Lambda},\widehat{\lambda}]}(\tau),\quad ({}^{\forall}(\sigma,\sigma_H)\in\mathcal{S}_{G/H}), \tag{6.122}$$

---

*11　そうしたコセット CFT の応用上重要な例としては，たとえば $\mathcal{N}{=}2$ 超共形場理論を与える**風間・鈴木超対称コセット模型** [64] があり，$\widehat{U}(1)\subset\widehat{H}'$ となる．なお，文献 [65] において風間・鈴木模型における「場の同一視」の問題が詳細に議論されており，本節を書く際の参考にした．

は，分岐関係式(6.120)と(4.133)，(4.126)を用いることによって証明される．モジュラー不変分配関数は既に述べた公式(6.81)によって与えられ，もちろん整数 L は $\mathcal{S}_{G/H}$ の位数に等しい．

コメント　**ゲージ化 WZW 模型**　残念ながら紙数の都合上割愛せざるを得ないが，コセット CFT には**ゲージ化 WZW 模型**というラグランジアン場の理論としての記述が存在し，物理的に見通しがよい．3 章で詳しく述べたように，$\widehat{G}$ カレント代数の CFT は，リー群 G をターゲット空間とする WZW 模型として実現することができる．WZW 模型のカイラルな $G_L \times G_R$ 対称性のうち，アノマリーを持たない部分群(通常はベクター的)についてはゲージ化を行うことができる．部分群 $H \subset G$ に対応するカレントに世界面上のゲージ場を結合させた模型を「G/H のゲージ化 WZW 模型」と呼び，$\widehat{G}/\widehat{H}$-コセット CFT と等価であることが知られている．詳しくは，文献 [66, 67] などを参照されたい．

これまで再三現れたコセット構成における「場の同一視」は，ゲージ化 WZW 模型の立場から自然に理解される．すなわち，$\widehat{H}$ のスペクトラル・フローは「ゲージ化されるべき」$\widehat{H}$ の対称性の一部(ラージ・ゲージ変換)であり，その変換で移り合う状態は同一視しなければならない．これがコセット CFT における場の同一視の起源である．一方，7.2.3 項で考える $\mathcal{N}=2$ 超共形場理論で重要な役割を果たすスペクトラル・フローは，「ゲージ化されない」対称性に相当する．

7 超共形場理論

超対称性とはボソンとフェルミオンを入れ替える「超対称変換」で理論が不変であることを意味し，超対称性を持つ共形場理論のことを**超共形場理論**(superconformal field theory, SCFT)と呼ぶ．超共形場理論は超弦理論の自然な定式化を与えるという点で重要である．さらに非くりこみ定理などの「よい」性質を持ち，幾何学と結び付くさまざまな興味深い現象を与える．

超対称性はフェルミオニックな生成元も含む「指数付けられたリー代数」(graded Lie algebra)，あるいは「超リー代数」(super Lie algebra)によって記述される対称性である*1．フェルミオニックな生成元は「超対称電荷」(supercharge)と呼ばれる．以下 $\mathcal{N}$ 個の超対称電荷を持つ理論を考え，その超対称電荷を，$Q^i_\alpha\,(i=1,2,\cdots,\mathcal{N})$のように表すことにしよう．ここで α はスピノルの添え字である．また超対称電荷を区別する添え字 i は $SO(\mathcal{N})$ で変換されると仮定する(「R 対称性が $SO(\mathcal{N})$ である」と言う)．超対称性を表す代数のなかで，最も重要なのは次の超対称電荷同士の反交換関係である($\{A,B\}\equiv AB+BA$)；

$$\{Q^i_\alpha, Q^j_{\dot\beta}\} = \delta^{ij} P_\mu \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}. \tag{7.1}$$

ここで P_μ は無限小並進の生成子である．

超共形対称性(超共形不変性)とは，共形変換を超対称変換を含むように拡大した**超共形代数**に対する対称性であり，そのような対称性を持つ理論が超共形場理論である．既に何度も見たように，2 次元の共形場理論においては正則部分(left-mover)と反正則部分(right-mover)の自由度が decouple しており，最

*1 より精密な超対称性の定義については [19] などを参照されたい．

も基本的なフェルミオニックな自由度は1成分のマヨラナ・ワイル・スピノルである．本書の慣習では左巻きスピノルが正則部分，右巻きスピノルが反正則部分と同定される．以下の議論では超対称電荷はマヨラナ・ワイル・スピノルであるとし，正則部分と反正則部分それぞれが独立にスピン $\frac{3}{2}$ のフェルミオニックなカレントの線積分として表される．このスピン $\frac{3}{2}$ のカレントを**スーパー・カレント**(supercurrent)と呼び，反交換関係(7.1)に類似してスーパー・カレントの2乗がエネルギー・運動量テンソルを生成する；

$$
\begin{aligned}
G(z)G(w) &\sim \frac{\kappa}{(z-w)^3}+\frac{2}{z-w}T(w),\\
\widetilde{G}(z)\widetilde{G}(w) &\sim \frac{\bar{\kappa}}{(\bar{z}-\bar{w})^3}+\frac{2}{\bar{z}-\bar{w}}\widetilde{T}(w).
\end{aligned}
$$

ここで $O((z-w)^{-3})$ の項はシュウインガー項であり，すぐ後で議論するように，ビラソロ代数の中心電荷から決まる．正確なOPEの形は次節以降で解説する．複数の種類のスーパー・カレントを導入することも可能であり，left-moverとright-moverそれぞれのスーパー・カレントの数を $\mathcal{N}_L$，$\mathcal{N}_R$ としよう．原理的には左と右で異なった数の超対称性を考えることも可能であるが，話をわかりやすくするため，以下では $\mathcal{N}_L=\mathcal{N}_R=\mathcal{N}$ の場合のみを考察する．特に $\mathcal{N}=1$，$\mathcal{N}=2$，$\mathcal{N}=4$ のケースが応用上重要である．また超共形場理論に対し，超対称性を持たない共形場理論を便宜上「$\mathcal{N}=0$ の共形場理論」と呼ぶことがある．

7.1 $\mathcal{N}=1$ 超共形場理論

最初に最も簡単な $\mathcal{N}=1$ の超共形場理論を考えよう．

7.1.1 $\mathcal{N}=1$ 超共形代数

$\mathcal{N}=1$ **超共形代数**(superconformal algebra, SCA)とは，ビラソロ代数 $\{L_n\}$ に1種類のフェルミオン的な演算子 $\{G_r\}$ を加えて拡大したものであり，次の(反)交換関係で定義される；

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}, \tag{7.2}$$

$$[L_m, G_r] = \left(\frac{1}{2}m-r\right)G_{m+r}, \tag{7.3}$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2-\frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}. \tag{7.4}$$

「超ビラソロ代数」(super-Virasoro algebra)，または「$\mathcal{N}=1$ の超ビラソロ代数」などと呼ばれることも多い．以下では「$\mathcal{N}=1$ SCA」と呼ぶことにしよう．(7.2)より明らかに $\mathcal{N}=1$ SCA はビラソロ代数を部分代数として含んでいる．そしてビラソロ代数と同様に，この代数は唯一のパラメータである中心電荷 c によって特徴付けられている．一見 G_r 同士の反交換関係(7.4)のシュウィンガー項の係数は独立に選べそうだが，(超リー代数としての)ヤコビ律によりビラソロ代数(7.2)の c から一意に定まることが証明される．

(7.3)は G_r が共形ウェイト $\frac{3}{2}$ のプライマリー場のフーリエ・モードであることを示している．そこで次式で**スーパー・カレント** $G(z)$ を定義しよう；

$$G(z) \equiv \sum_r \frac{G_r}{z^{r+\frac{3}{2}}}. \tag{7.5}$$

少し後で議論するが，r は境界条件に依存して整数または半整数値を取る．このとき(7.3)は次の OPE と等価であることがわかる；

$$T(z)G(w) \sim \frac{\frac{3}{2}G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G(w)}{z-w}.$$

超対称カレント $G(z)$ は半整数スピンを持つので，1.8.3 項で述べたように，$z \to ze^{2\pi i}$ で周期的または反周期的境界条件を考えることが可能である．(7.5)に注意すると，周期的境界条件(NS セクター)は半整数のモード展開を持ち，反周期的境界条件(R セクター)は整数のモード展開を持つことがわかる(表 7.1)．反交換関係(7.4)は本章の初めに述べた一般的な超対称代数(7.1)の対応物であり，次の OPE と等価である；

$$G(z)G(w) \sim \frac{\frac{2}{3}c}{(z-w)^3} + \frac{2}{z-w}T(w). \tag{7.6}$$

表 7.1 超対称カレントの周期的境界条件および反周期的境界条件

NS セクター	$r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$	$G(e^{2\pi i}z)=G(z)$
R セクター	$r\in\mathbb{Z}$	$G(e^{2\pi i}z)=-G(z)$

これまで見てきた超対称性のない CFT 同様，反正則部分(right-mover)にも超共形代数のコピーが存在し，表現論は正則部分と反正則部分を別々に考えればよい．全体のヒルベルト空間はそれらの(次数付けられた)テンソル積空間によって与えられる．

7.1.2 $\mathcal{N}=1$ 超共形代数の表現論

$\mathcal{N}=1$ SCA の表現論を考えよう．再びビラソロ演算子 L_0 を対角化する既約表現を考える．ユニタリ表現は，エルミート共役として

$$(L_n)^\dagger = L_{-n}, \qquad (G_r)^\dagger = G_{-r} \tag{7.7}$$

を要請することによって定義される．$\mathcal{N}=1$ SCA に対する最高ウェイト条件は，

$$\begin{cases} L_n|c,h\rangle = 0 & (n\in\mathbb{Z}_{>0}), \\ G_r|c,h\rangle = 0 & \left(\begin{array}{ll} r\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0} & (\text{NS セクター}) \\ r\in\mathbb{Z}_{>0} & (\text{R セクター}) \end{array}\right), \\ L_0|c,h\rangle = h|c,h\rangle & \end{cases} \tag{7.8}$$

と与えられる．これらを満たす最高ウェイト状態がプライマリー状態，あるいはプライマリー場に対応しており，NS セクターでは G_r $(r\geq\frac{1}{2})$ が消滅演算子として働き，G_r $(r\leq-\frac{1}{2})$ が生成演算子として働く．一方 R セクターにおいては，G_r $(r\geq1)$ が消滅，G_r $(r\leq-1)$ が生成演算子となる．つまり NS セクターの表現空間は，

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots G_{-\left(m_1+\frac{1}{2}\right)}G_{-\left(m_2+\frac{1}{2}\right)}\cdots|c,h\rangle_{\text{NS}}, \quad (n_i\in\mathbb{Z}_{>0},\ m_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}),$$

と書かれる状態(ディセンダント)で張られ，一方 R セクターは，

$$L_{-n_1}L_{-n_2}\cdots G_{-m_1}G_{-m_2}\cdots|c,h\rangle_{\mathrm{R}}, \quad (n_i\in\mathbb{Z}_{>0},\ m_i\in\mathbb{Z}_{>0}),$$

という状態で張られる．ここで，NS セクターと R セクターのプライマリー状態を，$|c,h\rangle_{\mathrm{NS}}$，$|c,h\rangle_{\mathrm{R}}$ と表して区別した．

我々が興味があるのはユニタリ表現である．2 章で解説したように，ユニタリ表現を調べるには特異ベクトルの詳細な構造を知る必要があるが，当面その問題は棚上げにしておく（つまりバーマ加群を考える）．

NS セクターの表現論は比較的単純である．ビラソロ代数($\mathcal{N}$=0)のときと同様，ユニタリ性から任意の状態の共形ウェイトに対し，不等式

$$h\geq 0, \tag{7.9}$$

が要請され，スーパー・カレント $G(z)$ が新しい条件を加えることはない．$h=0$ のプライマリー状態(NS 真空)は恒等演算子 $\mathbf{1}$ に対応し，最高ウェイト条件(7.8)に加えて，

$$L_{-1}|0\rangle=G_{-1/2}|0\rangle=0, \tag{7.10}$$

を満たす．

一方，マヨラナ・フェルミオン場のときのように R セクターにはゼロ・モード G_0 が存在するので注意が必要である．$[L_0,G_0]=0$ が成立するので，R セクターの一般の状態 $|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}$ と $G_0|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}$ は縮退しており，等しい L_0 固有値を持つことがわかる．このようにおのおのの R セクターの状態 $|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}$ に対して，等しい L_0 固有値を持ち，反対の統計を持つ「スーパー・パートナー」$G_0|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}$ が存在する．しかしながら，

$$G_0|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}=0$$

となる例外が存在し，このような状態は縮退していない．このケースがいつ起こるかを見るために，状態 $G_0|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}$ のノルムを計算してみよう．表現のユニタリ性から($L_0|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}=h|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}$ とする)，

$$0\leq\|\, G_0|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}\,\|^2={}_{\mathrm{R}}\langle\alpha|\left(L_0-\frac{c}{24}\right)|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}=(h-\frac{c}{24})_{\mathrm{R}}\langle\alpha|\alpha\rangle_{\mathrm{R}} \tag{7.11}$$

を得る．ここで，(7.4)から従う

$$G_0^2 = L_0 - \frac{c}{24} \tag{7.12}$$

を用いた．したがって，ユニタリ表現における R セクターの共形ウェイトは不等式

$$h \geq \frac{c}{24}, \tag{7.13}$$

を満たしていることになり，次の事実が結論される；

- $h > \frac{c}{24}$ のとき，R セクターの状態 $|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}$ はスーパー・パートナー $G_0|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}$ を持つ．
- $h = \frac{c}{24}$ のとき，R セクターの状態 $|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}$ は，縮退しておらず，

$$G_0|\alpha\rangle_{\mathrm{R}} = 0, \tag{7.14}$$

　が成立する．

逆に(7.14)が成立するときは，(7.12)より，共形ウェイトはユニタリ性から許される最小値 $h = \frac{c}{24}$ を取らなければならない．このような状態はもちろんプライマリー状態(最高ウェイト状態)であり，R セクターの共形ウェイトの最小値を持つので**ラモン真空**(Ramond vacuum)と呼ばれる．同様に，$G_0|\alpha\rangle_{\mathrm{R}} \neq 0$ となる状態 $|\alpha\rangle_{\mathrm{R}}$ の共形ウェイトは $\frac{c}{24}$ より大きいことがわかる．

一般に NS セクターの真空 $h=0$ は「性質のよい」超共形場理論には必ず一意的に存在するが，ラモン真空が存在するかどうかは考える理論に依存し，また一意であるとは限らない．G_0 は L_0 と可換なので通常の意味での超対称電荷の役割を果たし，そしてシリンダー上の(カイラルな)「ハミルトニアン」$L_0^{\mathrm{cyl}} = L_0 - \frac{c}{24}$ は期待通り G_0 の 2 乗に等しい．言い換えれば，条件(7.13)は超対称な理論のエネルギーの正値性を表している．ラモン真空は超対称真空に対応しているので，それが存在する理論は超対称性が破れておらず，一方ラモン真空が存在しない理論は超対称性が自発的に破れていることになる．応用上重要な多くの超共形場理論では複数のラモン真空が存在し，大きな縮重度を持

っているケースも多い．ラモン真空は超弦理論では零質量のフェルミオンを記述し，また幾何学的には超対称非線形シグマ模型におけるターゲット空間のコホモロジーに対応している．後で論ずるように，ラモン真空は特に $\mathcal{N}=2$ の超共形場理論において重要な役割を果たす．

$\mathcal{N}=1$ の SCA のユニタリ表現の完全な分類は，2 章で解説した $\mathcal{N}=0$ の場合同様，カッツ行列式の詳細な分析により与えられる．分類は $\mathcal{N}=0$ のケースに類似しており，ここでは結果のみ述べることにする．

- $c \geq \dfrac{3}{2}$ のとき
  任意の $h \geq 0$ (NS)，$h \geq \dfrac{c}{24}$ (R) に対し，最高ウェイト表現はユニタリ表現を与える．
- $0 < c < \dfrac{3}{2}$ のとき
  離散的な c，h の値の場合に限り，最高ウェイト表現はユニタリ表現となる．おのおのの c の値に対し，ユニタリ表現を与える h は有限個しか存在しない．

$0 < c < \dfrac{3}{2}$ の領域のユニタリ表現を $\mathcal{N}=0$ の場合同様「ユニタリ・ミニマル模型」と呼ぶ．超共形対称性が理論に大きな制約を与える興味深いケースであり，次節で詳しく解説しよう．

7.1.3 $\mathcal{N}=1$ ユニタリ・ミニマル模型

$\mathcal{N}=0$ のケース同様，$\mathcal{N}=1$ の超共形場理論には **$\mathcal{N}=1$ ユニタリ・ミニマル模型**と呼ばれる重要なクラスの模型が存在する．これらの模型は整数 $m\,(\geq 2)$ を唯一のパラメータとして含み，中心電荷は，

$$c = c_m \equiv \frac{3}{2}\left\{1 - \frac{8}{m(m+2)}\right\}, \quad (m = 2, 3, 4, \cdots) \tag{7.15}$$

という公式で与えられる [31]．パラメータ m を持つ模型を $\mathcal{M}_m^{\mathcal{N}=1}$ と表すことにしよう．$\mathcal{M}_m^{\mathcal{N}=1}$ においてユニタリ表現を与える共形ウェイトのスペクトルは，次の式で与えられる；

$$h_{r,s}=\frac{\{(m+2)r-ms\}^2-4}{8m(m+2)}+\frac{\epsilon}{16},\qquad \begin{cases}\epsilon=0 & (\text{NS セクター})\\ \epsilon=1 & (\text{R セクター})\end{cases} \tag{7.16}$$

ただし,

$$1\le r\le m-1,\qquad 1\le s\le m,$$
$$\begin{cases} r-s\in 2\mathbb{Z} & (\text{NS セクター})\\ r-s\in 2\mathbb{Z}+1 & (\text{R セクター})\end{cases}$$

であるとする．前項の最後に述べたが，カッツ行列式の詳細な分析により，これらの離散的な値の共形ウェイトを持つ最高ウェイト表現では無限個の特異ベクトルが存在する．それらをゼロと置くことでユニタリ表現が得られる．また，$0<c<\frac{3}{2}$ かつ $c\neq c_m\,({}^\forall m=2,3,\cdots)$ や，$h\neq h_{r,s}$ の場合は必ず非ユニタリ表現となることも証明される．一般に m が偶数のときにはラモン真空が存在し，超対称性は破れていない．実際，$(r,s)=\left(\frac{m}{2},\frac{m+2}{2}\right)$ のプライマリー状態が $h=\frac{c}{24}$ を与える(確かめよ)．

6.4 節で触れたように $\mathcal{N}=1$ ユニタリ・ミニマル系列 $\mathcal{M}_m^{\mathcal{N}=1}$ は次のコセット構成を持つ [58]；

$$\mathcal{M}_m^{\mathcal{N}=1}\cong\frac{\widehat{SU}(2)_k\times\widehat{SU}(2)_2}{\widehat{SU}(2)_{k+2}},\quad m=k+2.$$

エネルギー・運動量テンソル $T(z)$ はコセット構成の一般論により構成される ($J^a_{(k)}$ は $\widehat{SU}(2)_k$ のカレント，添え字について和の規則を用いる)；

$$T(z)=\frac{1}{k+2}:J^a_{(k)}J^a_{(k)}:+\frac{1}{4}:J^a_{(2)}J^a_{(2)}:-\frac{1}{k+4}:J^a_{(k+2)}J^a_{(k+2)}:. \tag{7.17}$$

スーパー・カレント $G(z)$ を構成するためには，(4.22)で議論したように $\widehat{SU}(2)_2$ セクターを自由フェルミオン $\{\psi^a(z)\}$ $(a=1,2,3)$ で表すのが便利である．コセット模型の演算子は，

$$J^a_{(k+2)}\equiv J^a_{(k)}+J^a_{(2)}\equiv J^a_{(k)}-\frac{i}{2}\epsilon^{abc}\psi^b\psi^c \tag{7.18}$$

と可換でなければならない．$G(z)$ を与えるスピン $\frac{3}{2}$ のカレントの候補とし

ては，$\psi^a J^a_{(k+2)}$ と $i\psi^1\psi^2\psi^3$ の線形結合が考えられ，$J^a_{(k+2)}$ との可換性の要請と OPE (7.6) によって決まる規格化条件より，

$$G(z) = \frac{2}{\sqrt{(k+2)(k+4)}}\left(\psi^a J^a_{(k+2)} + \frac{k}{2} i\psi^1\psi^2\psi^3\right), \tag{7.19}$$

となることがわかる．詳しい計算は読者の練習問題としよう．

6.4 節で解説したように，コセット指標は分岐関係式；

$$\chi^{SU(2)}_{r-1,m-2}(\tau,z)\chi^{SU(2)}_{t,2}(\tau,z) = \sum_{s=1}^{m+1}\chi^{(m)}_{[r,s;t]}(\tau)\chi^{SU(2)}_{s-1,m}(\tau,z), \tag{7.20}$$

$$r=1,\cdots,m-1,\ s=1,\cdots,m+1,\ t=0,1,2,$$

によって与えられる．ここで $\chi^{SU(2)}_{\ell,k}(\tau,z)$ は $\widehat{SU}(2)_k$ のスピン $\dfrac{\ell}{2}$ 可積分表現の指標 (4.15) である．コセット指標 $\chi^{(m)}_{[r,s;t]}(\tau)$ は，

$$\chi^{(m)}_{[r,s;t]}(\tau) \equiv 0, \quad r+s+t \in 2\mathbb{Z}+1,$$

を満たす．ここでスピン構造は，自由フェルミオン $\{\psi^a\}$ で記述される $\widehat{SU}(2)_2$ の量子数 $t=0,1,2$ が担っており，$t=0,2$ が NS セクター，$t=1$ が R セクターに対応する．もう少し精密に考えるには，$\widehat{SU}(2)_2$ の指標公式 (4.18) を思い出すとよい．$h=h_{r,s}$ を持つ $\mathcal{N}=1$ 超共形代数の既約表現の指標は，各スピン構造に対して，

$$\begin{aligned}
\chi^{(m)\,\mathrm{NS}}_{r,s}(\tau) &\equiv \chi_{[r,s;0]}(\tau)+\chi_{[r,s;2]}(\tau), && r+s\in 2\mathbb{Z},\\
\chi^{(m)\,\widetilde{\mathrm{NS}}}_{r,s}(\tau) &\equiv \chi_{[r,s;0]}(\tau)-\chi_{[r,s;2]}(\tau), && r+s\in 2\mathbb{Z},\\
\chi^{(m)\,\mathrm{R}}_{r,s}(\tau) &\equiv \sqrt{2}\,\chi_{[r,s;1]}(\tau), && r+s\in 2\mathbb{Z}+1,
\end{aligned} \tag{7.21}$$

と与えられる．「$\widetilde{\mathrm{NS}}$ セクター」とは NS セクターで，$(-1)^F$ (F はフェルミオン数演算子) を挿入してトレースを取ることを意味する (つまり，$(S,T)=(-,+)$ スピン構造である)．$r+s\in 2\mathbb{Z}+1$ に対しては $\chi^{(m)\,\mathrm{NS}}_{r,s}(\tau)\equiv\chi^{(m)\,\widetilde{\mathrm{NS}}}_{r,s}(\tau)\equiv 0$，$r+s\in 2\mathbb{Z}$ に対しては $\chi^{(m)\,\mathrm{R}}_{r,s}(\tau)\equiv 0$ と定義しておくのが便利である．R セクターの指標の $\sqrt{2}$ の因子が奇妙に思えるが，これは既に述べたようにラモン真空 $h=\dfrac{c}{24}$ 以外の表現に対してはプライマリー状態が 2 重縮退しており，

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{(\mathrm{R})}_{r,s}\otimes\widetilde{\mathcal{H}^{(\mathrm{R})}_{r,s}}}\left[q^{L_0-\frac{c}{24}}\bar{q}^{\widetilde{L}_0-\frac{c}{24}}\right]=2\left|\chi^{(m)}_{[r,s;1]}\right|^2$$

となることから導入した因子である*2．したがって，縮退のないラモン真空(すなわち，$(r,s)=\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{m+2}{2}\right)$, $m\in 2\mathbb{Z}$)に対しては，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\chi^{(m)\,\mathrm{R}}_{r,s}(\tau)\equiv\chi_{[r,s;1]}$ が厳密な意味での指標であるが，ここではモジュラー変換公式を書き下すのに便利なので，$\chi^{(m)\,\mathrm{R}}_{r,s}(\tau)$ を r, s の値によらず(7.21)式によって定義しておく．また，「$\widetilde{\mathrm{R}}$ セクター」(R セクターで $(-1)^F$ の挿入)の指標は，ラモン真空以外では，

$$\{(-1)^F, G_0\}=0, \quad \{(-1)^F, \widetilde{G}_0\}=0$$

より，2 重に縮退した状態からの寄与が相殺してゼロとなる．したがってラモン真空のみがトレースに寄与することができるので，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\chi^{(m)\,\widetilde{\mathrm{R}}}_{r,s}(\tau)=\delta_{r,\frac{m}{2}}\delta_{s,\frac{m+2}{2}}, \tag{7.22}$$

となる．これは超対称な場の理論におけるウィッテン指数に相当する．

分岐関係式(7.20)と $\widehat{SU}(2)$ のモジュラー変換公式(6.32)，(6.33)から指標のモジュラー変換性を調べることができる；

$$\chi^{(m)\,\sigma}_{r,s}(\tau)|_S=\sum_{r'=1}^{m-1}\sum_{s'=1}^{m+1}S^{(m)}_{(r,s),(r',s')}\chi^{(m),\,S\cdot\sigma}_{r',s'}(\tau),$$

$$S^{(m)}_{(r,s),(r',s')}\equiv\frac{2}{\sqrt{m(m+2)}}\sin\left(\frac{\pi rr'}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi ss'}{m+2}\right), \tag{7.23}$$

$$\chi^{(m)\,\sigma}_{r,s}(\tau)|_T=e^{2\pi i\left(h_{r,s}-\frac{c}{24}\right)}\chi^{(m)\,T\cdot\sigma}_{r,s}(\tau). \tag{7.24}$$

ここで，σ=NS, $\widetilde{\mathrm{NS}}$, R, ($\widetilde{\mathrm{R}}$) はスピン構造を表し，

---

*2　正則部分と反正則部分で縮退度は 2×2=4 となるように思われるかもしれないが，$\mathcal{N}=1$ の場合，縮退度 2 が正しい．理由は，ゼロ・モード G_0，$\widetilde{G}_0$ が可換ではなく反可換であり，2 次元のクリフォード代数を生成するからである．一方，下で述べる $\mathcal{N}=2$ のケースでは，ラモン真空以外の表現では正則・反正則部分で独立にカイラリティを決めることができ，4 重縮退となる．ちょうど $\mathcal{N}=1$ がマヨラナ・フェルミオン，$\mathcal{N}=2$ がディラック・フェルミオンに対応していると言える．なお，ラモン指標に $\sqrt{2}$ の因子をかけるのは，文献 [68] に従っており，$\mathcal{N}=1$ ユニタリ・ミニマル模型のコセット構成を初めて論じた [58] にはこの因子は用いられていない．

$$S{\cdot}\mathrm{NS}=\mathrm{NS},\quad S{\cdot}\widetilde{\mathrm{NS}}=\mathrm{R},\quad S{\cdot}\mathrm{R}=\widetilde{\mathrm{NS}},\quad S{\cdot}\widetilde{\mathrm{R}}=\widetilde{\mathrm{R}},$$
$$T{\cdot}\mathrm{NS}=\widetilde{\mathrm{NS}},\quad T{\cdot}\widetilde{\mathrm{NS}}=\mathrm{NS},\quad T{\cdot}\mathrm{R}=\mathrm{R},\quad T{\cdot}\widetilde{\mathrm{R}}=\widetilde{\mathrm{R}} \tag{7.25}$$

という記号を用いた(ここでは $\widetilde{\mathrm{R}}$ については不要であるが，後の便宜上いっしょに定義しておく)．またもちろん $h_{r,s}$，c は(7.15)，(7.16)に与えられている値を取る．$\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターのモジュラー変換公式は自明であろう．

以下の「場の同一視」の恒等式は，やはり $\widehat{SU}(2)$ のスペクトラル・フロー対称性から導かれる(4.3.4 項参照)；

$$\chi^{(m)\,\mathrm{NS}}_{m-r,m+2-s}(\tau)=\chi^{(m)\,\mathrm{NS}}_{r,s}(\tau),\quad \chi^{(m)\,\widetilde{\mathrm{NS}}}_{m-r,m+2-s}(\tau)=-\chi^{(m)\,\widetilde{\mathrm{NS}}}_{r,s}(\tau),$$
$$\chi^{(m)\,\mathrm{R}}_{m-r,m+2-s}(\tau)=\chi^{(m)\,\mathrm{R}}_{r,s}(\tau)\ . \tag{7.26}$$

$\widetilde{\mathrm{NS}}$ セクターに余分に -1 の因子が出ることに注意．言い換えれば，コセット指標 $\chi^{(m)}_{[r,s;t]}(\tau)$ に関し，

$$\chi^{(m)}_{[m-r,m+2-s;2-t]}(\tau)=\chi^{(m)}_{[r,s;t]}(\tau) \tag{7.27}$$

が成立する．ラモン真空 $(r,s)=\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{m+2}{2}\right)$ が，場の同一視の変換の固定点に対応している点に注意しよう．

$\mathcal{N}$=0 のユニタリ・ミニマル模型同様，$\widehat{SU}(2)$ の ADE 分類に基づいた完全なモジュラー不変分配関数の分類が知られている [68]．ここでは対角型 $((A_{m-1},A_{m+1})$ タイプ)モジュラー不変分配関数のみ与えておく；

m：奇数の場合

ラモン真空が存在しないので，$\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターは寄与しない．この場合，求める分配関数は，

$$Z(\tau,\bar{\tau})=\frac{1}{4}\sum_{\sigma=\mathrm{NS},\widetilde{\mathrm{NS}},\mathrm{R}}\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{m+1}\left|\chi^{(m)\,\sigma}_{r,s}(\tau)\right|^2\equiv\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{m+1}\sum_{t=0}^{2}\left|\chi^{(m)}_{[r,s;t]}(\tau)\right|^2, \tag{7.28}$$

となる．ここで係数の $\dfrac{1}{4}$ の因子は，スピン構造に関する対角的 GSO 射影の $\dfrac{1}{2}$ と場の同一視による $\dfrac{1}{2}$ の因子の積である．m が奇数のときは，

r, s, t の和の中に独立な表現がちょうど2回ずつ現れており，最後の表式の $\frac{1}{2}$ の因子を相殺する．

m：偶数の場合

この場合，ラモン真空 $(r,s)=\left(\frac{m}{2}, \frac{m+2}{2}\right)$ からの寄与は，R セクターと $\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターの和となる．したがって求める分配関数は，

$$
\begin{aligned}
Z(\tau,\bar{\tau}) &= \frac{1}{4} \sum_{\sigma=\mathrm{NS},\widetilde{\mathrm{NS}},\mathrm{R},\widetilde{\mathrm{R}}} \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{m+1} \left|\chi_{r,s}^{(m)\,\sigma}(\tau)\right|^2 \\
&\equiv \frac{1}{2} \left(\sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{m+1} \sum_{t=0}^{2} \left|\chi_{[r,s;t]}^{(m)}(\tau)\right|^2 + 1 \right).
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

ここで2行目の定数項 $\frac{1}{2}$ は $\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターの指標(7.22)からくる．最後の表式の和において，$(r,s,t)\neq\left(\frac{m}{2}, \frac{m+2}{2}, 1\right)$ の表現は独立なものが2回ずつ現れるので $\frac{1}{2}$ の因子を相殺する．一方，ラモン真空の項 $(r,s,t)=\left(\frac{m}{2}, \frac{m+2}{2}, 1\right)$ は1回しか登場しないので，$\frac{1}{2}$ の因子が一見奇妙に思える．しかしながらこの項をあらわに取り出してみると，

$$
\frac{1}{2}\left(\left|\chi_{[\frac{m}{2},\frac{m+2}{2};1]}^{(m)}(\tau)\right|^2 + 1 \right)
$$

となっていて，q，$\bar{q}$ でべき展開すると，期待通りすべての項が正の整数係数を持つことがチェックできる．この点に関しては，$\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターの寄与 $\frac{1}{2}$ を考慮することが重要であるという点を強調しておく．

興味のある読者のために，$\mathcal{N}=1$ ユニタリ・ミニマル模型のあらわな指標公式を与えておこう [58]；

$$
\chi_{r,s}^{(m)\,\mathrm{NS}}(\tau) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\theta_3}{\eta}}\, K_{r,s}^{(m)}(\tau) \equiv q^{-\frac{1}{16}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^n}\, K_{r,s}^{(m)}(\tau),
$$

$$
\chi_{r,s}^{(m)\,\widetilde{\mathrm{NS}}}(\tau) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\theta_4}{\eta}}\, \widetilde{K}_{r,s}^{(m)}(\tau) \equiv q^{-\frac{1}{16}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^n}\, \widetilde{K}_{r,s}^{(m)}(\tau),
$$

$$\chi^{(m)\,\mathrm{R}}_{r,s}(\tau) = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{\theta_2}{\eta}}\, K^{(m)}_{r,s}(\tau) \equiv \sqrt{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+q^n}{1-q^n}\, K^{(m)}_{r,s}(\tau). \tag{7.30}$$

ここで，$K^{(m)}_{r,s}(\tau)$，$\widetilde{K}^{(m)}_{r,s}(\tau)$ は，

$$K^{(m)}_{r,s}(\tau) \equiv \Theta_{(m+2)r-ms,m(m+2)}(\tau/2) - \Theta_{(m+2)r+ms,m(m+2)}(\tau/2), \tag{7.31}$$

$$\widetilde{K}^{(m)}_{r,s}(\tau) \equiv \begin{cases} (-1)^{\frac{r-s}{2}}\Theta_{(m+2)r-ms,m(m+2)}(\tau/2) \\ \qquad -(-1)^{\frac{r+s}{2}}\Theta_{(m+2)r+ms,m(m+2)}(\tau/2) \\ \qquad\qquad (m\in 2\mathbb{Z}), \\ (-1)^{\frac{r-s}{2}}\widetilde{\Theta}_{(m+2)r-ms,m(m+2)}(\tau/2) \\ \qquad -(-1)^{\frac{r+s}{2}}\widetilde{\Theta}_{(m+2)r+ms,m(m+2)}(\tau/2) \\ \qquad\qquad (m\in 2\mathbb{Z}+1) \end{cases} \tag{7.32}$$

と定義されている($\widetilde{\Theta}$ の定義は(A.7)を参照)．これらの公式は $\mathcal{N}$=0 のユニタリ・ミニマル模型のときのように，分岐関係式(7.20)に指標公式(4.15)，(4.18)を代入してテータ関数の積公式(A.19)を使うことで導くことができる．

具体例を見てみよう．$m=2$ では $c_m=0$ となるので，最初の非自明な模型は $m=3$ の場合である．

例 1 $m=3$，$c=\dfrac{7}{10}$

まず共形ウェイトのスペクトルは，$h_{r,s}=\dfrac{(5r-3s)^2-4}{120}$ $(1\le r\le 2,\ 1\le s\le 4)$ となる．表にまとめると，

表 7.2 共形ウェイトのスペクトル($m=3$, $c=7/10$)

NS セクター	$h_{1,1}=h_{2,4}=0$	$h_{1,3}=h_{2,2}=\frac{1}{10}$
R セクター	$h_{1,2}=h_{2,3}=\frac{3}{80}$	$h_{1,4}=h_{2,1}=\frac{7}{16}$

がプライマリー状態のスペクトルである．$c=\dfrac{7}{10}$ は 3 重臨界イジング模型，すなわち $m=4$ のユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_4$ の中心電荷と等しい．したがって，

表 7.3 $\mathcal{N}=1$ 超共形場理論としての 3 重臨界イジング模型：$h_{r,s}$ は $\mathcal{M}_4$ としての共形ウェイト

$s=4$			
$s=3$			$\lvert\frac{1}{10}\rangle$
$s=2$		$\lvert\frac{3}{80}\rangle$	$\lvert\frac{3}{5}\rangle=G_{-1/2}\lvert\frac{1}{10}\rangle$
$s=1$	$\lvert 0\rangle$	$\lvert\frac{7}{16}\rangle$	$\lvert\frac{3}{2}\rangle=G_{-3/2}\lvert 0\rangle$
$h_{r,s}$	$r=1$	$r=2$	$r=3$

$$\mathcal{M}_3^{\mathcal{N}=1} \cong \mathcal{M}_4,$$

の等価性が期待される．しかし，プライマリー状態の共形ウェイトのスペクトルを表 2.2 と比較してみると，$h=\dfrac{3}{2}$，$h=\dfrac{3}{5}$ のプライマリー状態が抜け落ちていることに気付く．これらは $\mathcal{N}=0$ の意味で(すなわちビラソロ代数に対して)はプライマリー状態だが，$\mathcal{N}=1$ の超共形代数に対しては，$h=0$, $h=\dfrac{1}{10}$ のプライマリー状態のディセンダントである．その様子を表 7.3 に示しておく．あるいは指標で $\mathcal{N}=1$ と $\mathcal{N}=0$ の関係を表すと，次のようになる；

$$\begin{aligned}
&\chi_{1,1}^{(3)\,\mathrm{NS}} = \chi_{2,4}^{(3)\,\mathrm{NS}} = \chi_0+\chi_{\frac{3}{2}}, \quad \chi_{1,1}^{(3)\,\widetilde{\mathrm{NS}}} = -\chi_{2,4}^{(3)\,\widetilde{\mathrm{NS}}} = \chi_0-\chi_{\frac{3}{2}},\\
&\chi_{1,3}^{(3)\,\mathrm{NS}} = \chi_{2,2}^{(3)\,\mathrm{NS}} = \chi_{\frac{1}{10}}+\chi_{\frac{3}{5}}, \quad -\chi_{1,3}^{(3)\,\widetilde{\mathrm{NS}}} = \chi_{2,2}^{(3)\,\widetilde{\mathrm{NS}}} = \chi_{\frac{1}{10}}-\chi_{\frac{3}{5}},\\
&\chi_{1,2}^{(3)\,\mathrm{R}} = \chi_{2,3}^{(3)\,\mathrm{R}} = \sqrt{2}\chi_{\frac{3}{80}}, \quad \chi_{1,4}^{(3)\,\mathrm{R}} = \chi_{2,1}^{(3)\,\mathrm{R}} = \sqrt{2}\chi_{\frac{7}{16}}.
\end{aligned} \tag{7.33}$$

ここで χ_h は共形ウェイト h の $\mathcal{N}=0$ の指標を表す．例えば最初の恒等式は，$(r,s)=(1,1)$ の $\mathcal{N}=1$ 超共形代数の表現はビラソロ代数の表現としては可約であり，ユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_4$ の $h=0$ と $h=\dfrac{3}{2}$ の既約表現に分解することを意味している．また，この指標の分解のもとで，モジュラー不変分配関数(7.28)は，$\mathcal{M}_4$ の対角型モジュラー不変分配関数に一致することが確かめられる．

例 2　$m=4$，$c=1$

次に簡単な例は $m=4$ であり，中心電荷は $c=1$ となる．8 個の独立プライマリー状態が存在し，その共形ウェイトのスペクトルは表 7.4 のようになる；

表 7.4　共形ウェイトのスペクトル(m=4, c=1)

NS セクター	$h_{1,1}=0$	$h_{1,3}=\dfrac{1}{6}$	$h_{1,5}=1$	$h_{2,2}=\dfrac{1}{16}$
R セクター	$h_{1,2}=\dfrac{1}{16}$	$h_{1,4}=\dfrac{9}{16}$	$h_{2,1}=\dfrac{3}{8}$	$h_{2,3}=\dfrac{1}{24}$

ただし同一視すべきパートナーは省略した．$(r,s)=(2,3)$ がラモン真空である．

この模型は c=1 なので，1 成分の自由ボソンで表されることが予想されるであろう．もちろん離散的なプライマリー場のスペクトルを持つので，コンパクト・ボソンでなければならない．しかし少々事情は複雑であり，この模型は単純なコンパクト・ボソンの共形場理論には帰着せず，$\mathbb{Z}_2$ オービフォルドになることがわかる．この点については，次節において $\mathcal{N}=2$ のミニマル模型を解説するときにまとめて議論しよう．

7.2　$\mathcal{N}=2$ 超共形場理論

この節では $\mathcal{N}=2$ 超共形場理論について解説する．$\mathcal{N}=2$ の理論は超弦理論においては応用上特に重要であり，幾何学との密接な関係を持つ．

7.2.1　$\mathcal{N}=2$ 超共形代数

$\mathcal{N}=2$ 超共形代数は 2 種類のスーパー・カレント $G^1(z)$，$G^2(z)$ を持ち，さらにボソンとフェルミオンの自由度をバランスさせるために，エネルギー・運動量テンソル $T(z)$ に加えて $SO(2)\cong U(1)$ のカレント $J(z)$ が含まれている．カレント $J(z)$ は通常の超対称性における R 対称性を記述しており，(G^1,G^2) はこのカレントの生成する $SO(2)$ ($\cong U(1)$) 変換に対し 2 重項としてふるまう．あるいは，

$$G^{\pm}(z)\equiv G^1(z)\pm iG^2(z)$$

とおくと，$G^{\pm}(z)$ は $J(z)$ に対し電荷 ±1 を持つ．モード展開を，

$$T(z)=\sum_n \frac{L_n}{z^{n+2}},$$
$$G^{\pm}(z)=\sum_r \frac{G_r^{\pm}}{z^{r+\frac{3}{2}}},$$
$$J(z)=\sum_n \frac{J_n}{z^{n+1}}, \tag{7.34}$$

によって導入すると，$\mathcal{N}=2$ 超共形代数(SCA)は次の(反)交換関係によって定義される；

$$[L_m, L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0},$$
$$[L_m, G_r^{\pm}]=\left(\frac{1}{2}m-r\right)G_{m+r}^{\pm},$$
$$[L_m, J_n]=-nJ_{m+n},$$
$$[J_m, J_n]=\frac{c}{3}m\delta_{m+n,0},$$
$$[J_m, G_r^{\pm}]=\pm G_{m+r}^{\pm},$$
$$\{G_r^+, G_s^-\}=2L_{r+s}+(r-s)J_{r+s}+\frac{c}{3}\left(r^2-\frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0},$$
$$\{G_r^+, G_s^+\}=\{G_r^-, G_s^-\}=0. \tag{7.35}$$

もとの $\{T(z), G^{\pm}(z), J(z)\}$ を用いると，(7.35)は次の OPE と等価である；

$$T(z)T(w)\sim\frac{c/2}{(z-w)^4}+\frac{2T(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial T(w)}{z-w},$$
$$T(z)G^{\pm}(w)\sim\frac{3}{2}\frac{G^{\pm}(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial G^{\pm}(w)}{z-w},$$
$$T(z)J(w)\sim\frac{J(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial J(w)}{z-w},$$
$$G^{\pm}(z)G^{\pm}(w)\sim 0,$$
$$G^+(z)G^-(w)\sim\frac{2c/3}{(z-w)^3}+\frac{2J(w)}{(z-w)^2}+\frac{2T(w)+\partial J(w)}{z-w},$$
$$J(z)G^{\pm}(w)\sim\pm\frac{G^{\pm}(w)}{z-w},$$

$$J(z)J(w) \sim \frac{c/3}{(z-w)^2}.$$

$G^{\pm}(z)$ はビラソロ代数 $\{L_n\}$ に対し $h=\frac{3}{2}$ のプライマリー場として変換し，もちろん $J(z)$ は通常の $h=1$ のカレントとしてふるまう．$\{T(z), G^1(z)\}$，または $\{T(z), G^2(z)\}$ の生成する部分代数は $\mathcal{N}=1$ SCA と同型であることに注意しよう．J_0 の固有値は $\boldsymbol{U(1)}$ **電荷**（$U(1)$ charge）と呼ばれる．$J(z)$ 自身と $T(z)$ は $U(1)$ 電荷を持たないが，既に述べたように $G^{\pm}(z)$ は $U(1)$ 電荷 ±1 を持つ．

7.2.2 $\mathcal{N}$=2 超共形代数の表現論 その 1

さて，$\mathcal{N}$=2 SCA のユニタリ表現を議論しよう．以下，$\hat{c}\equiv\frac{c}{3}$ という記号を用いることにする．

演算子のエルミート共役は次式で与えられる；

$$(J_n)^{\dagger} = J_{-n}, \quad (L_n)^{\dagger} = L_{-n}, \quad (G_r^{\pm})^{\dagger} = G_{-r}^{\mp}. \tag{7.36}$$

c を固定した場合，表現は最高ウェイト状態の共形ウェイト h と $U(1)$ 電荷 Q によって特徴付けられ，最高ウェイト条件は次のように書かれる；

$$\begin{cases} L_n|h,Q\rangle = 0 & (n \geq 1), \\ J_n|h,Q\rangle = 0 & (n \geq 1), \\ G_r^{\pm}|h,Q\rangle = 0 & \begin{pmatrix} r \geq \frac{1}{2} & (\text{NS セクター}) \\ r \geq 1 & (\text{R セクター}) \end{pmatrix}, \\ L_0|h,Q\rangle = h|h,Q\rangle, \\ J_0|h,Q\rangle = Q|h,Q\rangle. \end{cases} \tag{7.37}$$

さらに R セクターにおいては，最高ウェイト状態への G_0^+ と G_0^- の作用を規定する必要がある．本書では最高ウェイト状態の定義として，(7.37)に加えて

$$G_0^+|h,Q\rangle = 0, \tag{7.38}$$

を課すことにする．もし $G_0^-|h,Q\rangle\neq0$ ならば，$L_0=h$ のプライマリー状態は $|h,Q\rangle$, $G_0^-|h,Q\rangle$ の 2 重縮退であることがわかる．

一方，$G_0^+|h,Q\rangle=G_0^-|h,Q\rangle=0$ が成立するとき，プライマリー状態は縮退していないことになる．(ラモン真空)表現のユニタリ性の仮定より，

$$0 \le \langle h,Q|G_0^+G_0^-|h,Q\rangle = \langle h,Q|\{G_0^+,G_0^-\}|h,Q\rangle$$
$$= 2\langle h,Q|\left(L_0-\frac{\hat{c}}{8}\right)|h,Q\rangle = 2\left(h-\frac{\hat{c}}{8}\right)\langle h,Q|h,Q\rangle,$$

が成り立つので，不等式

$$h \ge \frac{\hat{c}}{8}\left(\equiv \frac{c}{24}\right), \tag{7.39}$$

が得られる．そして，$\mathcal{N}=1$ のとき同様 $h=\dfrac{\hat{c}}{8}\equiv\dfrac{c}{24}$ がラモン真空に対応し，$h>\dfrac{\hat{c}}{8}$ の場合は，プライマリー状態は，$|h,Q\rangle$, $G_0^-|h,Q\rangle$ の 2 重項となる．

一方，NS セクターにおいては，ユニタリ性の必要条件として，

$$0 \le \langle h,Q|G_{\frac{1}{2}}^-G_{-\frac{1}{2}}^+|h,Q\rangle = \langle h,Q|\{G_{-\frac{1}{2}}^+,G_{\frac{1}{2}}^-\}|h,Q\rangle = \langle h,Q|\,(2L_0-J_0)\,|h,Q\rangle,$$
$$0 \le \langle h,Q|G_{\frac{1}{2}}^+G_{-\frac{1}{2}}^-|h,Q\rangle = \langle h,Q|\{G_{\frac{1}{2}}^+,G_{-\frac{1}{2}}^-\}|h,Q\rangle = \langle h,Q|\,(2L_0+J_0)\,|h,Q\rangle$$

が成立しなければならないので不等式

$$h \ge \frac{|Q|}{2} \tag{7.40}$$

が得られる．さらに，不等式(7.40)の等号成立に関して同値関係

$$h = \frac{Q}{2},\quad Q \ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad G_{-1/2}^+|h,Q\rangle = 0, \tag{7.41}$$
$$h = \frac{|Q|}{2},\quad Q \le 0 \quad\Longleftrightarrow\quad G_{-1/2}^-|h,Q\rangle = 0, \tag{7.42}$$

が成立することもわかる．(7.41)が成立する場合を**カイラル・プライマリー状態**(chiral primary state)，(7.42)が成立する場合を**反カイラル・プライマリー状態**(anti-chiral primary state)と呼び，特に重要な表現を与える [69]．超対称代数の表現論をかじったことのある読者ならば，(反)カイラル・プライマリー状態に対する最高ウェイト表現がいわゆる「short multiplet」に対応していることを了解されるであろう．言い換えれば，

$$h \longleftrightarrow \text{質量}, \quad Q \longleftrightarrow \text{電荷},$$

とみなせば，(7.40)は BPS 不等式に相当し，(反)カイラル・プライマリー状態は(反)BPS 状態に他ならない．

ここで，ユニタリ性の条件(7.39)，(7.40)は必要条件であって，**必ずしも十分条件ではない**ことを注意しておく．完全なユニタリ表現の分類は少々高級な内容になり，7.2.4 及び 7.2.5 項で紹介する．ここでは(反)カイラル・プライマリーのユニタリ性についてのみ述べておく．まず，カイラル・プライマリー状態についてはユニタリ性の条件は，単純に

$$0 \leq Q \leq \hat{c}, \tag{7.43}$$

と書ける．$Q \geq 0$ は(7.40)から従い，さらに

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \frac{Q}{2}, Q | G^-_{\frac{3}{2}} G^+_{-\frac{3}{2}} | \frac{Q}{2}, Q \rangle = \langle \frac{Q}{2}, Q | \{ G^+_{-\frac{3}{2}}, G^-_{\frac{3}{2}} \} | \frac{Q}{2}, Q \rangle \\ &= \langle \frac{Q}{2}, Q | \, (2L_0 - 3J_0 + 2\hat{c}) \, | \frac{Q}{2}, Q \rangle = (Q - 3Q + 2\hat{c}) \, \langle \frac{Q}{2}, Q | \frac{Q}{2}, Q \rangle, \end{aligned} \tag{7.44}$$

より $Q \leq \hat{c}$ が得られる．少々非自明であるが，これらがユニタリ性の十分条件であることが証明される．反カイラル・プライマリー状態についてはユニタリ性の条件は，

$$0 \geq Q \geq -\hat{c}, \tag{7.45}$$

となる．このように，

> **(反)カイラル・プライマリーの $U(1)$ 電荷の絶対値はユニタリ性の要請から $\hat{c}$ が上限値となる．**

この事実は応用が広いので覚えておくとよい．

コメント **カイラル・リング** カイラル・プライマリー状態に対応するカイラル・プライマリー場は興味深い性質を示すのでここで紹介しよう．

$\mathcal{N}=2$ 超共形場理論におけるプライマリー場の OPE の一般形は次のように書かれる；

$$\phi_{h_1,Q_1}(w)\phi_{h_2,Q_2}(z)=\sum_{h_3,Q_3}\frac{C^{(h_3,Q_3)}_{(h_1,Q_1),(h_2,Q_2)}}{(w-z)^{h_1+h_2-h_3}}\phi_{h_3,Q_3}(z)+\cdots. \tag{7.46}$$

ここで h_i は共形ウェイト，Q_i は $U(1)$ 電荷である．$U(1)$ 電荷の保存則より，

$$Q_1+Q_2=Q_3$$

が成立しなければならない．さて，左辺の場 $\phi_{h_1,Q_1}(w)$，$\phi_{h_2,Q_2}(z)$ がカイラル・プライマリーであるとすると，

$$h_1=\frac{1}{2}Q_1,\qquad h_2=\frac{1}{2}Q_2$$

が成り立つ．そしてユニタリ性の条件(7.40)より，

$$h_3\geq\frac{Q_3}{2}=\frac{Q_1+Q_2}{2}=h_1+h_2.$$

この関係を(7.46)に適用すると，2 つのカイラル・プライマリー場の OPE は，$\boldsymbol{w\to z}$ **において特異性を持たず**，この極限のもとで $h_3=\dfrac{Q_3}{2}$ の項，すなわちカイラル・プライマリー場のみが生き残ることが結論される．したがって，同一点 z における演算子積を正則化の手続きなしに定義することができる；

$$\begin{aligned}\phi_{h_1,Q_1}(z)\phi_{h_2,Q_2}(z)&\equiv\lim_{w\to z}\phi_{h_1,Q_1}(w)\phi_{h_2,Q_2}(z)\\&=C^{(h_1+h_2,Q_1+Q_2)}_{(h_1,Q_1),(h_2,Q_2)}\phi_{h_1+h_2,Q_1+Q_2}(z).\end{aligned}\tag{7.47}$$

これは任意の点 z で成立するので座標依存性を無視することができる．こうして，カイラル・プライマリー場の空間は(7.47)によって積構造が定義され，**カイラル・リング**(chiral ring)と呼ばれる [69]．通常，フュージョン規則のように，「構造定数」$C^{*}_{*,*}$ のあらわな値は重要ではない．演算子積における $U(1)$ 電荷の保存則とユニタリティ条件(7.43)により，カイラル・リングは必ずべき零(nilpotent)である．

荷電共役対称性により，反カイラル・プライマリー場に対しても全く同様に反カイラル・リングが定義される．高次元の共形場理論においても OPE に関して同様の事実が存在し，(反)カイラル・リングが定義され重要な役割を果たす．

7.2.3 スペクトラル・フロー

$\mathcal{N}=2$ の SCA は $U(1)$ のカレント代数を含むおかげで，$\mathcal{N}=1$ の SCA にはない興味深い性質を持っている．すなわち，**スペクトラル・フロー**と呼ばれる

自己同型：

$$
\begin{aligned}
U_\eta L_n U_\eta^{-1} &= L_n - \eta J_n + \hat{c}\frac{\eta^2}{2}\delta_{n,0}, \\
U_\eta J_n U_\eta^{-1} &= J_n - \hat{c}\eta\delta_{n,0}, \\
U_\eta G_r^\pm U_\eta^{-1} &= G_{r\mp\eta}^\pm,
\end{aligned} \tag{7.48}
$$

が存在する [69]．ここで η はスペクトラル・フローのパラメータである．原理的には連続的な値 $\eta\in\mathbb{R}$ を考えることも可能であるが，以下，表現論において重要な $\eta\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ の場合に限ることにする．スペクトラル・フロー(7.48)が $\mathcal{N}$=2 SCA (7.35)の自己同型であることは簡単に確かめられるので，読者の練習問題とする．もう少し正確に言うと，$\eta\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ のときは，超対称カレント $G^\pm$ のモードを整数 $\longleftrightarrow$ 半整数の入れ換えを行うので，NS セクターと R セクターを入れ換えることがわかる．さらにスペクトラル・フローによってエルミート共役の関係(7.36)が不変に保たれることも簡単にチェックできる．この事実はスペクトラル・フローが $\mathcal{N}$=2 SCA のユニタリ表現をユニタリ表現に写すことを意味している．U_η が次の性質を持つことも容易にチェックできる；

$$
U_{\eta_1}U_{\eta_2} = U_{\eta_1+\eta_2}, \quad U_\eta^{-1} = U_{-\eta}. \tag{7.49}
$$

すなわち，$\{U_\eta\}$ は「1 パラメータ付き可換群」を生成している．

4.3.4 項において，カレント代数に対するスペクトラル・フローの概念を導入したが，スペクトラル・フロー変換(4.135)，(4.136)と，(7.48)が類似していることに気付くであろう．実際，$\mathcal{N}$=2 の $U(1)$ カレント $J(z)$ のシュウインガー項は，

$$
J(z)J(w) \sim \frac{\hat{c}}{(z-w)^2},
$$

であって，パラメータ $\hat{c}$ が(4.135)，(4.136)における $\frac{k}{2}$ に対応していることが見てとれる．

(7.48)から明らかなように，スペクトラル・フロー変換 U_η によって，量子数 (h,Q) は次のように変化する；

$$L_0|\alpha\rangle = h|\alpha\rangle, \quad J_0|\alpha\rangle = Q|\alpha\rangle, \quad |\alpha'\rangle \equiv U_\eta|\alpha\rangle,$$
$$\Longrightarrow L_0|\alpha'\rangle = \left(h+\eta Q+\frac{\hat{c}}{2}\eta^2\right)|\alpha'\rangle, \quad J_0|\alpha'\rangle = (Q+\hat{c}\eta)\,|\alpha'\rangle. \tag{7.50}$$

ここで U_η は一般に最高ウェイト条件(7.37)を不変に保たないので注意が必要である．すなわち，U_η は $G^\pm$ のモードをずらしてしまうので，一般に最高ウェイト状態を最高ウェイト状態に写すとは限らない．スペクトラル・フローがユニタリ表現にどのように作用するかは，表現論の分類において重要な役割を果たすので 7.2.4 項で解説することとしよう．ここでは応用上重要な「$\frac{1}{2}$ スペクトラル・フロー」について触れよう．

コメント

(反)カイラル・プライマリーとラモン真空　既に述べたように，フロー・パラメータ η が半整数であるスペクトラル・フローは NS セクターと R セクターを入れ替える変換として働く．特に $U_{\frac{1}{2}}$ $(U_{-\frac{1}{2}})$は，ラモン真空を(反)カイラル・プライマリー状態に写す：

$$|\frac{\hat{c}}{8},Q\rangle \xrightarrow{U_{\frac{1}{2}}} |\frac{Q}{2}+\frac{\hat{c}}{4},Q+\frac{\hat{c}}{2}\rangle, \quad |\frac{\hat{c}}{8},Q\rangle \xrightarrow{U_{-\frac{1}{2}}} |-\frac{Q}{2}+\frac{\hat{c}}{4},Q-\frac{\hat{c}}{2}\rangle. \tag{7.51}$$

ここで Q はラモン真空の $U(1)$ 電荷である．たとえば，

$$G_0^+|\frac{\hat{c}}{8},Q\rangle = G_0^-|\frac{\hat{c}}{8},Q\rangle = 0,$$

より，

$$G^+_{-\frac{1}{2}}U_{\frac{1}{2}}|\frac{\hat{c}}{8},Q\rangle = U_{\frac{1}{2}}G_0^+|\frac{\hat{c}}{8},Q\rangle = 0,$$
$$G^-_{-\frac{1}{2}}U_{-\frac{1}{2}}|\frac{\hat{c}}{8},Q\rangle = U_{-\frac{1}{2}}G_0^-|\frac{\hat{c}}{8},Q\rangle = 0,$$

が従う．カイラル・プライマリーのユニタリ性の条件(7.43)(あるいは(7.45))から，ラモン真空に関するユニタリ性の条件として，

$$-\frac{\hat{c}}{2} \le Q \le \frac{\hat{c}}{2}, \tag{7.52}$$

が得られる．この条件はまた，これまでと同様に，反交換関係 $\{G^\pm_1, G^\mp_{-1}\}=2L_0\pm 2J_0+\frac{3}{4}\hat{c}$ の正値性の議論から導くこともできるので読者への練習問題とする．

このように，$\frac{1}{2}$ スペクトラル・フローは NS セクターと R セクターのヒルベルト空

間の間の同型対応を与えるが，この事実は超弦理論における時空の超対称性の実現に対し重要な役割を果たす．

7.2.4 $\mathcal{N}=2$ 超共形代数の表現論 その 2：$\hat{c}>1$ のときのユニタリ表現の分類

さて，$\mathcal{N}=2$ SCA のユニタリ表現についてもう少し詳しく解説しよう．共形代数の一般論からユニタリ表現の分類はカッツ行列式の正値性を調べることによって与えられるが，$\mathcal{N}=2$ SCA は $U(1)$ カレントを含むために，$\mathcal{N}=0$，$\mathcal{N}=1$ の代数に比べて事情は複雑となる．たとえば，おおまかに言って，$\mathcal{N}=0$ の $c>1$ の表現の $\mathcal{N}=2$ での対応物は $\hat{c}>1$ $(c>3)$ の表現である．しかし，すぐ下で述べるように，ユニタリ表現の分類は，$\mathcal{N}=0$ の $c>1$ のケース（同様に $\mathcal{N}=1$ の $c>\dfrac{3}{2}$ のケース）に比べて複雑な様相を示す．

詳しいカッツ行列式の解析に関しては文献 [70, 71] などを参照していただくことにして，本節では $\hat{c}>1$ の場合のユニタリ表現に関して知られている事実をまとめておきたい．以下，$\hat{c}>1$ を仮定し，便宜上，

$$\kappa \equiv \hat{c}-1\,(>0), \tag{7.53}$$

という記号を用いることにする．NS セクターに限って解説するが，既に述べたように，$\dfrac{1}{2}$ スペクトラル・フローを用いて，NS セクターから R セクターのユニタリ表現を再現することができるので，その点は読者の研究課題とする．少々煩雑になるので，図 7.1 を適宜参照しながら読まれたい．

(1) 非退化表現（有質量表現）

まず最も簡単な非退化表現について考えよう．この場合バーマ加群のなかにヌル状態は存在しない．NS セクターのユニタリな非退化表現は次の領域の最高ウェイト状態 $|h,Q\rangle$ によって生成される；

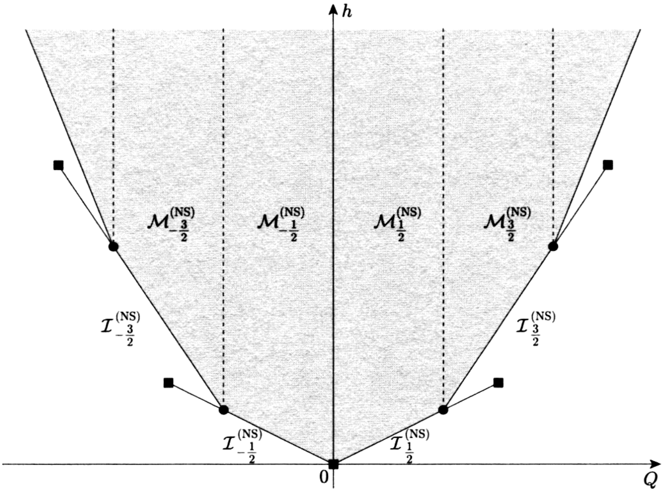


図 7.1 $\mathcal{N}=2$ SCA のユニタリ表現($\hat{c}>1$, NS セクター)
領域 $\mathcal{M}^{(\mathrm{NS})}_\eta$ 内には「有質量表現」が存在し，線分 $\mathcal{I}^{(\mathrm{NS})}_\eta$ 上には「零質量物質場表現」，そして $\mathcal{I}^{(\mathrm{NS})}_\eta$ の端点(■で表す)には，「重力子表現」が存在する．

$$(h,Q) \in \bigcup_{\eta\in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} \mathcal{M}^{(\mathrm{NS})}_\eta,$$
$$\mathcal{M}^{(\mathrm{NS})}_\eta \equiv \left\{(h,Q)\ :\ h > \eta Q - \frac{\kappa}{2}\eta^2 + \frac{\kappa}{8},\ \kappa\left(\eta - \frac{1}{2}\right) \le Q \le \kappa\left(\eta + \frac{1}{2}\right)\right\}. \tag{7.54}$$

たとえば，

$$\mathcal{M}^{(\mathrm{NS})}_{1/2} = \left\{h > \frac{1}{2}Q,\ 0\le Q\le\kappa\right\},\quad \mathcal{M}^{(\mathrm{NS})}_{-1/2} = \left\{h > \frac{1}{2}|Q|,\ 0\ge Q\ge -\kappa\right\},$$

であるが，これはユニタリ性の不等式(7.40)に対応する．他の $U(1)$ 電荷の領域のユニタリ性については，整数パラメータのスペクトラル・フローを用いて議論することができる．この点を簡単に見てみよう．今，(7.54)によって与えられる非退化表現を $\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}(h,Q)$ と表すことにすると，スペクトラル・フローによって，$\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}(h,Q)$ は，次のように写像されることがわかる($n\in\mathbb{Z}$)：

$$
\begin{aligned}
&U_n \ : \ \mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}(h,Q) \ \longrightarrow \ \mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}(h',Q'), \\
&h' = h+nQ+\frac{\kappa}{2}n^2, \ Q' = Q+\kappa n.
\end{aligned} \tag{7.55}
$$

ここで，$h'=h+nQ+\dfrac{\hat{c}}{2}n^2$，$Q'=Q+\hat{c}n$ ではないことに注意しよう．これは，7.2.3 項で既に触れたように，$|h,Q\rangle$ を $\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}(h,Q)$ の最高ウェイト状態とするとき，$U_n|h,Q\rangle$ は一般に最高ウェイト状態にはならない，という点に起因している．(7.55)の関係から容易に，

$$
U_n \ : \ \mathcal{M}^{(\mathrm{NS})}_{\eta} \ \longrightarrow \ \mathcal{M}^{(\mathrm{NS})}_{\eta+n}, \quad ({}^{\forall}\eta \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}, \ {}^{\forall}n \in \mathbb{Z}), \tag{7.56}
$$

となることがチェックできる．したがって，非退化表現を定義する領域 $\mathcal{M}^{(\mathrm{NS})}$ は整数スペクトラル・フロー変換で不変であり，これはスペクトラル・フローがユニタリ性を保つ自己同型であるという事実と整合している．

非退化表現の指標公式は容易に求められる．特異ベクトルがないので，2 つのボソニックな自由振動子 L_{-n}，J_{-n} ($n\in\mathbb{Z}$) の寄与と 2 つのフェルミオニックな自由振動子 G^{+}_{-r}, G^{-}_{-r} (NS に対し $r\in\dfrac{1}{2}+\mathbb{Z}_{\geq 0}$) の寄与を足し上げればよい．簡単な計算の後，$\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}(h,Q)$ の指標は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}(h,Q;\tau,z) &= q^{h-\frac{\hat{c}}{8}}y^{Q} \ \frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1+yq^{n-1/2})(1+y^{-1}q^{n-1/2})}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2} \\
&\equiv q^{h-\frac{\kappa}{8}}y^{Q} \ \frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)^3},
\end{aligned} \tag{7.57}
$$

と求められる．

$\mathcal{N}$=2 超共形代数の指標とスペクトラル・フローについては次の重要な関係式が存在する．今，$\mathcal{V}$ を $\hat{c}$ を持つ $\mathcal{N}$=2 SCA の任意の表現として，その指標を，

$$
\mathrm{ch}_{\mathcal{V}}(\tau,z) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}\left[q^{L_0-\frac{\hat{c}}{8}}e^{2\pi i z J_0}\right], \tag{7.58}
$$

としよう．このとき，スペクトラル・フローされた表現 $U_\eta(\mathcal{V})$ ($\eta\in\dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$) に対し，

$$\mathrm{ch}_{U_\eta(\mathcal{V})}(\tau,z) = q^{\frac{\hat{c}}{2}\eta^2} e^{2\pi i \hat{c}\eta}\, \mathrm{ch}_{\mathcal{V}}(\tau, z+\eta\tau), \tag{7.59}$$

が成立する．実際，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{U_\eta(\mathcal{V})}\left[q^{L_0-\frac{\hat{c}}{8}} e^{2\pi i z J_0}\right] &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}\left[U_\eta^{-1}\, q^{L_0-\frac{\hat{c}}{8}} e^{2\pi i z J_0}\, U_\eta\right] \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}\left[q^{L_0+\eta J_0+\frac{\hat{c}}{2}\eta^2-\frac{\hat{c}}{8}} e^{2\pi i z(J_0+\hat{c}\eta)}\right] \\
&= q^{\frac{\hat{c}}{2}\eta^2} e^{2\pi i \hat{c} z\eta}\, \mathrm{ch}_{\mathcal{V}}(\tau, z+\eta\tau),
\end{aligned}$$

となる．ここで(7.48)を用いている．(7.59)を用いると，上で述べた非退化表現の量子数の変化分の公式(7.55)を容易に導くことができる．

(2) 退化表現(i)(零質量物質場表現)

続いてもう少し非自明な退化表現について考えよう．おおまかに言って，これはユニタリ非退化表現の領域 $\mathcal{M}^{(*)}$ の境界上に存在する最高ウェイト表現である*3(図 7.1 参照)．すなわち，次の線分上の (h,Q) に対して NS セクターのユニタリ退化表現 $\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},\eta}(Q)$ が定義される；

$$\mathcal{I}^{(\mathrm{NS})}_\eta \equiv \left\{(h,Q) : h = \eta Q - \frac{\kappa}{2}\eta^2 + \frac{\kappa}{8},\ \kappa\left(|\eta|-\frac{1}{2}\right) < |Q| < \kappa\left(|\eta|+\frac{1}{2}\right)+1\right\} \quad \left(\eta \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right). \tag{7.60}$$

最高ウェイト表現 $\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},\eta}(Q)$ は一般にレベル $|\eta|$ の特異ベクトルを持つ．もう少し精密に言うと，$\eta>0$ のときは，$G^+_{-\eta}|h,Q\rangle+\cdots$，一方，$\eta<0$ のときは，$G^-_\eta|h,Q\rangle+\cdots$，という形の特異ベクトルを持ち，既約表現を得るためにゼロとおかなければならない($\cdots$ はレベル $<|\eta|$ の超対称カレントのモードの組み合わせで書かれており，$\eta=\pm\frac{1}{2}$ の場合を除き一般にゼロでない)．特別な場合として，$\eta=\frac{1}{2}$ は($Q\neq0$ の)カイラル・プライマリー，$\eta=-\frac{1}{2}$ のときは反カイラル・プライマリーに対応する．また一般の $\eta\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ を持つ $\mathcal{I}^{(\mathrm{NS})}_\eta$ 上の

---

*3 ここで $\mathcal{I}^{(*)}_\eta$ と $\mathcal{M}^{(*)}_\eta$ では $U(1)$ 電荷のレンジが少し異なっている点を注意しよう．

表現はすべてカイラル・プライマリー $\mathcal{I}^{(\mathrm{NS})}_{\frac{1}{2}}$（または，反カイラル・プライマリー $\mathcal{I}^{(\mathrm{NS})}_{-\frac{1}{2}}$）から整数スペクトラル・フローによって得ることができる．超弦理論のカラビ・ヤウ空間へのコンパクト化では，$Q\neq 0$ の（反）カイラル・プライマリー状態は零質量物質場に対応しているので，ここで考えているユニタリ退化表現を便宜上「零質量物質場表現」と呼ぶこともある．

指標公式は次のように与えられる [72, 73]；

$$\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},\eta}(Q;\tau,z)=\frac{q^{h-\frac{\kappa}{8}}y^Q}{1+y^{\mathrm{sgn}(\eta)}q^{|\eta|}}\frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}\quad\left(h=\eta Q-\frac{\kappa}{2}\eta^2+\frac{\kappa}{8},\ \eta\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right). \tag{7.61}$$

たとえば，カイラル・プライマリー $\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},1/2}(Q)$ の場合を考えてみよう．求める指標 $\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},1/2}(Q;\tau,z)$ は，$v\equiv|h=\dfrac{Q}{2},Q\rangle$ が生成するバーマ加群 $M(v)$ の指標から特異ベクトル $w\equiv G^+_{-\frac{1}{2}}|h,Q\rangle$ の生成するバーマ加群 $M(w)$ の指標を差し引いたものに等しい；

$$\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},1/2}(Q;\tau,z)=\mathrm{ch}_{M(v)}(\tau,z)-\mathrm{ch}_{M(w)}(\tau,z).$$

ここで $\mathrm{ch}_{M(v)}$ はもちろん非退化表現の指標(7.57)で $h=\dfrac{Q}{2}$ とおいたものに等しい．一方，$(G^+_{-\frac{1}{2}})^2=0$ であるから，$G^+_{-\frac{1}{2}}w=0$ が成り立ち，

$$\mathrm{ch}_{M(w)}=\frac{yq^{\frac{1}{2}}}{1+yq^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{ch}_{M(v)},$$

が成り立つことがわかる．よって，求める指標公式は，

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},1/2}(Q;\tau,z)&=\left(1-\frac{yq^{\frac{1}{2}}}{1+yq^{\frac{1}{2}}}\right)\mathrm{ch}_{M(v)}(\tau,z)\\&=\frac{q^{h-\frac{\kappa}{8}}y^Q}{1+yq^{\frac{1}{2}}}\frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}\quad\left(h=\frac{Q}{2}\right),\end{aligned}$$

と求められる．一般の η に対する指標公式は，スペクトラル・フローを用いて公式(7.59)から導くことができる．

(3) 退化表現(ii)(重力子表現)

最後に特別な既約表現として，離散的なスペクトルを持つ退化表現が存在する．これは線分 $\mathcal{I}^{(*)}_\eta$ の端点に存在する表現である．このタイプの表現で最も

簡単なものは $h=Q=0$ の NS 真空によって生成される表現であり，以下 $\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},0}$ と表すことにする．超弦理論のカラビ・ヤウ・コンパクト化では，この表現は重力子に対応しているので，「重力子表現」と呼ばれることもある．NS 真空 $|0,0\rangle$ は，カイラル・プライマリーでかつ反カイラル・プライマリーである特別な状態であるから，2 つの特異ベクトル $G^{+}_{-\frac{1}{2}}|0,0\rangle$, $G^{-}_{-\frac{1}{2}}|0,0\rangle$ を持つ．

指標公式は，少し複雑で，

$$\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},0}(\tau,z)=q^{-\frac{\kappa}{8}}\frac{1-q}{\left(1+yq^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+y^{-1}q^{\frac{1}{2}}\right)}\frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}, \tag{7.62}$$

と与えられる [72, 73]．これは，$v\equiv|0,0\rangle$ のバーマ加群の指標から特異ベクトル $w_\pm\equiv G^{\pm}_{-\frac{1}{2}}|0,0\rangle$ のバーマ加群の指標を差し引くことによって得られる．再び $G^{\pm}_{-\frac{1}{2}}w_\pm=0$ より，

$$\mathrm{ch}_{M(w_+)}=\frac{yq^{\frac{1}{2}}}{1+yq^{\frac{1}{2}}}\mathrm{ch}_{M(v)},\quad \mathrm{ch}_{M(w_-)}=\frac{y^{-1}q^{\frac{1}{2}}}{1+y^{-1}q^{\frac{1}{2}}}\mathrm{ch}_{M(v)},$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},0}(\tau,z)&=\mathrm{ch}_{M(v)}(\tau,z)-\mathrm{ch}_{M(w_+)}(\tau,z)-\mathrm{ch}_{M(w_-)}(\tau,z)\\&=\left(1-\frac{yq^{\frac{1}{2}}}{1+yq^{\frac{1}{2}}}-\frac{y^{-1}q^{\frac{1}{2}}}{1+y^{-1}q^{\frac{1}{2}}}\right)\mathrm{ch}_{M(v)}(\tau,z)\\&=q^{-\frac{\kappa}{8}}\frac{1-q}{\left(1+yq^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+y^{-1}q^{\frac{1}{2}}\right)}\frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}\end{aligned}$$

が導かれる．ところで，この計算から明らかなように，次の指標の恒等式が成立し有用である；

$$\begin{aligned}&\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},0}(\tau,z)+\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},\frac{1}{2}}(Q=1;\tau,z)+\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},-\frac{1}{2}}(Q=-1;\tau,z)\\&\qquad=\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}(h=0,Q=0;\tau,z)\equiv q^{-\frac{\kappa}{8}}\frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}.\end{aligned} \tag{7.63}$$

より一般的な重力子表現は $\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},0}$ の整数スペクトラル・フローによって実現される．すなわち $n\in\mathbb{Z}$ をパラメータとして，

$$\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},n}\equiv U_n\left(\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},0}\right), \tag{7.64}$$

と定義する．対応する指標公式はやはり公式(7.59)を用いて，

$$\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},n}(\tau,z)\equiv q^{h^{(\mathrm{NS})}_n-\frac{\kappa}{8}}y^{Q_n}\frac{1-q}{\left(1+y^{\mathrm{sgn}(n)}q^{|n|-\frac{1}{2}}\right)\left(1+y^{\mathrm{sgn}(n)}q^{|n|+\frac{1}{2}}\right)}\frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}$$
$$(n\in\mathbb{Z}-\{0\}),\quad(7.65)$$

と求められる．ここで，

$$\begin{cases} h^{(\mathrm{NS})}_n=\dfrac{\kappa}{2}n^2+|n|-\dfrac{1}{2}, \\ Q_n=\kappa n+\mathrm{sgn}(n), \end{cases}\qquad(7.66)$$

は最高ウェイト状態の量子数である．

7.2.5 $\mathcal{N}=2$ ユニタリ・ミニマル模型

$\mathcal{N}=0$，$\mathcal{N}=1$ と同様 $\mathcal{N}=2$ でも $\hat{c}<1$ の場合は，ユニタリ表現は離散的なスペクトルを持ち，**$\mathcal{N}=2$ ユニタリ・ミニマル模型**と呼ばれる [74]．これは中心電荷が

$$\hat{c}\left(\equiv\frac{c}{3}\right)=\frac{k}{k+2},\quad k=1,2,3,\cdots,\qquad(7.67)$$

と与えられる理論である．この中心電荷の公式は，形式的にレベル k の $SU(2)$WZW 模型のものと同じであることに気付かれるであろう．この場合もパラメータ k を「レベル」と呼び，以下レベル k の $\mathcal{N}=2$ ユニタリ・ミニマル模型を，$\mathcal{M}^{\mathcal{N}=2}_k$ という記号で表すことにする．$\mathcal{N}=2$ のユニタリ・ミニマル模型は，$\mathcal{N}=0$，$\mathcal{N}=1$ のケース同様，代表的な有理共形場理論であり，超弦理論においてはゲプナー模型などの応用を持つ重要な理論である．

$\mathcal{M}^{\mathcal{N}=2}_k$ に属する既約表現はこれまで同様，最高ウェイト表現として与えられ，2 つの整数値 ℓ, m でラベルされる．これを $\mathcal{L}^{(\mathrm{NS})}_k(\ell,m)$，$\mathcal{L}^{(\mathrm{R})}_k(\ell,m)$ という記号で表すことにする．$\mathcal{N}=0$，$\mathcal{N}=1$ の場合同様，これらは無限個の特異ベクトルを持つ最高ウェイト表現となる．プライマリー状態の量子数をまとめておこう；

NS セクター $\mathcal{L}_k^{(\mathrm{NS})}(\ell, m)$

$\mathcal{L}_k^{(\mathrm{NS})}(\ell, m)$ の最高ウェイト状態は以下の共形ウェイト $h_{\ell,m}$ と $U(1)$ チャージ $Q_{\ell,m}$ を持つ；

$$\begin{cases} h_{\ell,m}^{(\mathrm{NS})} = \dfrac{\ell(\ell+2)-m^2}{4(k+2)}, \\ Q_{\ell,m} = \dfrac{m}{k+2}. \end{cases} \tag{7.68}$$

ここで，ℓ, m は，

$$0 \le \ell \le k, \qquad -\ell \le m \le \ell, \qquad \ell-m \equiv 0 \pmod 2, \tag{7.69}$$

を満たす整数である．後で「場の同一視」を用いて (ℓ, m) の領域を拡大して考えるが，(7.69)を「標準領域」(standard range)と呼ぶ．

R セクター $\mathcal{L}_k^{(\mathrm{R})}(\ell, m)$

$\mathcal{L}_k^{(\mathrm{R})}(\ell, m)$ のプライマリー状態は以下の量子数を持つ；

$$\begin{cases} h_{\ell,m}^{(\mathrm{R})} = \dfrac{\ell(\ell+2)-m^2}{4(k+2)} + \dfrac{1}{8}, \\ \widetilde{Q}_{\ell,m} = \dfrac{m}{k+2}. \end{cases} \tag{7.70}$$

今度は ℓ, m は，

$$0 \le \ell \le k, \qquad -\ell-1 \le m \le \ell+1, \qquad \ell-m \equiv 1 \pmod 2, \tag{7.71}$$

という領域を動き，$-\ell+1 \le m \le \ell-1$ の場合は，$U(1)$ 電荷 $\widetilde{Q}_{\ell,m} \pm \frac{1}{2}$ を持つ 2 重に縮退したプライマリー状態を持つ．$m=\pm(\ell+1)$ は縮退のないラモン真空であり，それぞれ $U(1)$ 電荷 $Q=\widetilde{Q}_{\ell,m} \mp \frac{1}{2}$ を持つ(複合同順)．もう少し精密に述べると，場の同一視によってラモン真空の間には，

$$|\ell, m = \ell+1\rangle = |k-\ell, m = -(k-\ell)-1\rangle, \tag{7.72}$$

の関係がある(両辺が等しい量子数を持つことを確認せよ)．(7.71)はやはり R セクターに対する標準領域である．

(7.68), (7.70) における量子数 ℓ, m は，(6.4.2) で述べたパラフェルミオン理論同様，$SU(2)$ の量子数を思わせる．$\mathcal{N}$=2 ユニタリ・ミニマル模型は，$\mathcal{N}$=0，$\mathcal{N}$=1 のユニタリ・ミニマル模型同様，$\widehat{SU}(2)$ カレント代数に基づくコセット構成を持ち，それがこの事実の起源である．すなわち，$\mathcal{N}$=2 ユニタリ・ミニマル模型 $\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2}$ は次のようにコセット構成される；

$$\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2} \cong \frac{\widehat{SU}(2)_k \times \widehat{SO}(2)_1}{\widehat{U}(1)}. \tag{7.73}$$

一般に $\mathcal{N}$=2 超共形場理論を与える**風間・鈴木模型** [64] と呼ばれるクラスの超対称コセット模型が知られており，これはその最も簡単な場合に相当する．またパラフェルミオン $\widehat{SU}(2)/\widehat{U}(1)$ 模型の超対称化とみなすこともできる．

$\mathcal{N}$=2 SCA がコセット構成 (7.73) でどのように構成されるかを見るために，レベル k の $\widehat{SU}(2)$ カレント代数 $\{J^a\}$ を考えよう．$\widehat{SO}(2)_1$ は 2 つのマヨラナ・フェルミオン $\psi^i\,(i=1,2)$ と同定される．便宜上，複素に組んで，

$$\psi^{\pm}(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1(z) \pm i\psi^2(z)),$$

とおき，$\psi^+(z)\psi^-(w) \sim \dfrac{1}{z-w}$ と規格化しておく．コセット構成は $\widehat{U}(1)$ のカレント

$$J^3_{\mathrm{tot}}(z) \equiv J^3(z) + J^f(z) \equiv J^3(z) + :\psi^+(z)\psi^-(z): \tag{7.74}$$

に関して定義される．すなわちコセット構成 (7.73) のカイラル代数は，$J^3_{\mathrm{tot}}(z)$ と可換な生成元を持つ．具体的に次のように $\mathcal{N}$=2 SCA が構成される；

$$\begin{aligned} T(z) \equiv \frac{1}{k+2}\sum_{a=1}^{3} :J^a(z)J^a(z): - \frac{1}{2}\psi^+(z)\partial\psi^-(z): - \frac{1}{2}\psi^-(z)\partial\psi^+(z): \\ - \frac{1}{k+2} :J^3_{\mathrm{tot}}(z)J^3_{\mathrm{tot}}(z):, \end{aligned}$$

$$G^{\pm}(z) \equiv \sqrt{\frac{2}{k+2}}\psi^{\pm}(z)J^{\mp}(z), \quad J(z) \equiv J^f(z) - \frac{2}{k+2}J^3_{\mathrm{tot}}(z). \tag{7.75}$$

これらが実際に $J^3_{\mathrm{tot}}(z)$ と特異的な OPE を持たず，$\mathcal{N}$=2 SCA を生成することを示すのは読者への練習問題とする．

既約表現 $\mathcal{L}_k^{(\mathrm{NS})}(\ell,m)$，$\mathcal{L}_k^{(\mathrm{R})}(\ell,m)$ がコセット構成(7.73)の立場でどのように表されるかを見てみよう．同時にこれらの表現の指標公式を導く．そのためには，6.4 節で解説したように，カレント代数の分岐関係式を調べればよい；

$$L_\ell^{\widehat{SU}(2)_k}\otimes L_{-s}^{\widehat{SO}(2)_1} = \bigoplus_{\substack{m\in\mathbb{Z}_{2(k+2)}\\ \ell+m+s\in 2\mathbb{Z}}} \mathcal{L}_k(\ell,m,s)\otimes L_{-m}^{\widehat{U}(1)}. \tag{7.76}$$

ここで，$\mathcal{L}_k(\ell,m,s)$ がコセット構成のヒルベルト空間である．$L_\ell^{\widehat{SU}(2)_k}$ は $\widehat{SU}(2)_k$ のスピン $\dfrac{\ell}{2}$ の可積分表現である．$L_s^{\widehat{SO}(2)_1}$ は $\widehat{SO}(2)_1\cong\{\psi^+,\psi^-\}$ のヒルベルト空間であり，$s\in\mathbb{Z}_4$ はスピン構造をコントロールするパラメータで，$s=0,2$ が NS セクター，$s=+1,-1$ が R セクターに対応している．フェルミオン数 J_0^f の固有値は，

$$J_0^f = \frac{s}{2}+2n, \quad (n\in\mathbb{Z})$$

となり，$L_s^{\widehat{SO}(2)_1}$ の指標はレベル 2 のテータ関数を用いて，

$$\mathrm{Tr}_{L_s^{\widehat{SO}(2)_1}}\left[q^{L_0-\frac{1}{24}}e^{2\pi izJ_0^f}\right] = \frac{\Theta_{s,2}(\tau,z)}{\eta(\tau)},$$

と表される．また，右辺の $\widehat{U}(1)$ は $J_{\mathrm{tot}}^3(z)$ で生成されており，スペクトルは

$$J_{\mathrm{tot},0}^3 = \frac{m}{2}+(k+2)n, \quad (n\in\mathbb{Z})$$

と与えられるので，指標はレベル $k+2$ のテータ関数を用いて，

$$\mathrm{Tr}_{L_m^{\widehat{U}(1)}}\left[q^{L_0-\frac{1}{24}}e^{2\pi izJ_{\mathrm{tot},0}^3}\right] = \frac{\Theta_{m,k+2}(\tau,z)}{\eta(\tau)},$$

と表される．よって，$\widehat{U}(1)$ カレントの分解；

$$e^{2\pi iwJ_0^3}e^{2\pi i(w+z)J_0^f} = e^{2\pi izJ_0}e^{2\pi i\left(w+\frac{2z}{k+2}\right)J_{\mathrm{tot},0}^3}$$

に注意すると，指標に関する次の分岐関係式が得られる．これは $\mathcal{N}=2$ ユニタリ・ミニマル模型において基本的な役割を果たす公式である；

$$\chi_{\ell,k}^{SU(2)}(\tau,w)\frac{\Theta_{-s,2}(\tau,w+z)}{\eta(\tau)}=\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2(k+2)}}\chi_m^{\ell,s}(\tau,z)\frac{\Theta_{-m,k+2}\left(\tau,w+\frac{2z}{k+2}\right)}{\eta(\tau)}. \tag{7.77}$$

$\chi_m^{\ell,s}(\tau,z)$ がコセット CFT $\mathcal{L}_k(\ell,m,s)$ の指標である．ここで便宜上

$$\chi_m^{\ell,s}\equiv 0,\quad \ell+m+s\equiv 1 \pmod 2, \tag{7.78}$$

と定義した．さらに 4.3.4 項で述べた $\widehat{SU}(2)$ の指標 $\chi_{\ell,k}^{SU(2)}$ とテータ関数のスペクトラル・フロー*4の性質(4.137)，(4.138)を用いると，恒等式

$$\chi_m^{\ell,s}=\chi_{m+2(k+2)}^{\ell,s}=\chi_m^{\ell,s+4}=\chi_{m+(k+2)}^{k-\ell,s+2}, \tag{7.79}$$

が成立することがわかる．特に最後の等号は，場の同一視の関係

$$\mathcal{L}_k(\ell,m,s)\cong\mathcal{L}_k(k-\ell,m+(k+2),s+2) \tag{7.80}$$

を意味している．$\chi_{\ell,k}^{SU(2)}$ の分解公式(6.95)，及びテータ関数の積公式(A.19)を用いてコセット指標 $\chi_m^{\ell,s}(\tau,z)$ をあらわに計算すると，

$$\chi_m^{\ell,s}(\tau,z)=\sum_{r\in\mathbb{Z}_k}c_{\ell,m-s+4r}^{(k)}(\tau)\Theta_{2m+(k+2)(-s+4r),2k(k+2)}\left(\tau,\frac{z}{k+2}\right) \tag{7.81}$$

が得られる [74]．ここで $c_{\ell,m}^{(k)}(\tau)$ は $\widehat{SU}(2)_k$ のストリング関数であり，(6.97)で与えられる．

量子数 $s\in\mathbb{Z}_4$ がスピン構造を定めていたことを思い出そう．$\mathcal{N}=2$ SCA の NS セクター，R セクターそれぞれの既約表現 $\mathcal{L}_k^{(\mathrm{NS})}(\ell,m)$, $\mathcal{L}_k^{(\mathrm{R})}(\ell,m)$ は，次のように $\mathcal{L}_k(\ell,m,s)$ と関係している；

---

*4 混同を避けるために，ここでの場の同一視を与えるスペクトラル・フローと 7.2.3 項で導入した $\mathcal{N}=2$ のスペクトラル・フローは別の概念であることを注意しておく．前者はコセットを定義する $J_{\mathrm{tot}}^3(z)$（分母の $\widehat{U}(1)$）によるものであるが，後者は風間・鈴木コセット構成における「ゲージ化されない対称性」に相当し，$\mathcal{N}=2$ $U(1)$ カレント $J(z)$ によって生成される．6.4.3 項も参照．

$$\mathcal{L}_k^{(\mathrm{NS})}(\ell,m) = \mathcal{L}_k(\ell,m,0)\oplus\mathcal{L}_k(\ell,m,2),$$
$$\mathcal{L}_k^{(\mathrm{R})}(\ell,m) = \mathcal{L}_k(\ell,m,1)\oplus\mathcal{L}_k(\ell,m,-1). \tag{7.82}$$

ここで，m のレンジは $\mathbb{Z}_{2(k+2)}$ であることに注意しよう．すなわち，周期性 $\mathcal{L}_k^{(\sigma)}(\ell,m+2(k+2))=\mathcal{L}_k^{(\sigma)}(\ell,m)$ (σ=NS, R)を要請する．$\ell+m+s\in 2\mathbb{Z}$ より，NS(R)セクターでは $\ell+m\in 2\mathbb{Z}$ ($\ell+m\in 2\mathbb{Z}+1$)である．場の同一視(7.80)より，

$$\mathcal{L}_k^{(\sigma)}(\ell,m) \cong \mathcal{L}_k^{(\sigma)}(k-\ell,m+k+2), \quad (\sigma = \mathrm{NS,\ R}) \tag{7.83}$$

が成り立ち，この同一視のもとで，量子数 (ℓ,m) は標準領域(7.69)，(7.71)の中から選ぶことができるのである．モジュラー不変分配関数を書き下すためには $m\in\mathbb{Z}_{2(k+2)}$ に広げて考えた方が便利であるが，共形ウェイトの公式(7.68)，(7.70)は標準領域に対して適用しなければならない．ところで，$\mathcal{L}_k(\ell,m,s)$ に対するプライマリー状態を $|\ell,m,s\rangle$ と書いて，これを「$\mathcal{N}=2$ ユニタリ・ミニマル模型のプライマリー状態」と呼ぶことも多い．しかし，$\mathcal{N}=2$ SCA の既約表現はあくまで $\mathcal{L}_k^{(\mathrm{NS})}(\ell,m)$，$\mathcal{L}_k^{(\mathrm{R})}(\ell,m)$ であることに注意しよう．

(7.82)より，各スピン構造に対する指標公式は次のように書かれる；

$$\mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\mathrm{NS})}(\tau,z) = \chi_m^{\ell,0}(\tau,z)+\chi_m^{\ell,2}(\tau,z),$$
$$\mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\widetilde{\mathrm{NS}})}(\tau,z) = \chi_m^{\ell,0}(\tau,z)-\chi_m^{\ell,2}(\tau,z),$$
$$\mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\mathrm{R})}(\tau,z) = \chi_m^{\ell,1}(\tau,z)+\chi_m^{\ell,-1}(\tau,z),$$
$$\mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\tau,z) = \chi_m^{\ell,1}(\tau,z)-\chi_m^{\ell,-1}(\tau,z). \tag{7.84}$$

再び $\widetilde{\mathrm{NS}}$ セクター，$\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターは $(-1)^F$ の挿入を表している($F=J_0^f$, (mod 2))．たとえば，(7.84)にコセット指標 $\chi_m^{\ell,s}(\tau,z)$ の表式(7.81)を代入すると，NS セクターの指標は，

$$\mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\mathrm{NS})}(\tau,z) = \sum_{m'\in\mathbb{Z}_{2k}} c_{\ell,m'}^{(k)}(\tau)\Theta_{(k+2)m'-km,k(k+2)}\left(\frac{\tau}{2},\frac{z}{k+2}\right) \tag{7.85}$$

と書くことができる [74]．また，$\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターの指標で z=0 とおいたものは，ウィッテン指数であり，$\mathcal{N}$=1 のユニタリ・ミニマル模型同様ラモン真空を数え上げる；

$$\mathrm{ch}^{(\widetilde{\mathrm{R}})}_{\ell,m}(\tau, z=0) = \delta^{(2(k+2))}_{m,\ell+1} - \delta^{(2(k+2))}_{m,-(\ell+1)}. \tag{7.86}$$

分岐関係式(7.77)からコセット指標 $\chi^{\ell,s}_m$ のモジュラー変換性が容易に調べられる；

$$\begin{aligned}\chi^{\ell,s}_m(\tau,z)|_S &\equiv \chi^{\ell,s}_m\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) \\ &= e^{i\pi\frac{kz^2}{(k+2)\tau}} \sum_{\ell'=0}^{k} \sum_{m'\in\mathbb{Z}_{2(k+2)}} \sum_{s'\in\mathbb{Z}_4} S^{(k)}_{\ell,\ell'} M^{(k+2)*}_{m,m'} M^{(2)}_{s,s'} \chi^{\ell',s'}_{m'}(\tau,z),\end{aligned} \tag{7.87}$$

$$\chi^{\ell,s}_m(\tau,z)|_T \equiv \chi^{\ell,s}_m(\tau+1,z) = e^{2\pi i\gamma^{l,s}_m} \chi^{\ell,s}_m(\tau,z). \tag{7.88}$$

ここで，再び $S^{(k)}_{\ell,\ell'} \equiv \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\frac{\pi(\ell+1)(\ell'+1)}{k+2}\right)$ は $\widehat{SU}(2)_k$ の S 変換行列，$M^{(N)}_{m,m'} \equiv \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{-2\pi i\frac{mm'}{2N}}$ は，$\chi_m \equiv \frac{\Theta_{m,N}}{\eta}$ の S 変換行列である．また，

$$\gamma^{\ell,s}_m \equiv \frac{\ell(\ell+2)-m^2}{4(k+2)} + \frac{s^2}{8} - \frac{k}{8(k+2)}, \tag{7.89}$$

とおいた．これらより各スピン構造の指標(7.84)のモジュラー変換公式を導くことも容易である．

次に($\mathcal{N}=2$ SCA の意味の)スペクトラル・フローの作用を調べてみよう．分岐関係式(7.77)と $\widehat{SU}(2)$ 指標とテータ関数に対するスペクトラル・フローの公式(4.137)，(4.138)により(または，(7.81)を直接用いて)，コセット指標 $\chi^{\ell,s}_m(\tau,z)$ に対するスペクトラル・フローの公式として次式が得られる；

$$q^{\frac{\hat{c}}{2}\eta^2} y^{\hat{c}\eta} \chi^{\ell,s}_m(\tau, z+\eta\tau) = \chi^{\ell,s-2\eta}_{m-2\eta}(\tau,z), \quad (\eta\in\frac{1}{2}\mathbb{Z},\ \hat{c}\equiv\frac{k}{k+2}). \tag{7.90}$$

よって，整数スペクトラル・フローに対し，

$$U_n \ :\ \mathcal{L}^{(\sigma)}_k(\ell,m) \xrightarrow{\ \cong\ } \mathcal{L}^{(\sigma)}_k(\ell,m-2n), \quad (n\in\mathbb{Z},\ \sigma=\mathrm{NS,\,R}), \tag{7.91}$$

が成り立ち，特に $\mathcal{M}^{\mathcal{N}=2}_k$ ではスペクトラル・フローは $\mathbb{Z}_{k+2}$ の周期性を持つことがわかる．これは，無限個の既約表現が登場する $\hat{c}>1$ のケースとは対照的であり，$\mathcal{M}^{\mathcal{N}=2}_k$ が有理共形場理論であるという事実に対応している．半整

数パラメータのスペクトラル・フローでは再びNSセクターとRセクターが入れ替わる；

$$U_r \ : \ \mathcal{L}_k^{(\mathrm{NS})}(\ell, m) \xrightarrow{\ \cong\ } \mathcal{L}_k^{(\mathrm{R})}(\ell, m-2r), \quad (r \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z},\ \ell+m \in 2\mathbb{Z}),$$
$$U_r \ : \ \mathcal{L}_k^{(\mathrm{R})}(\ell, m) \xrightarrow{\ \cong\ } \mathcal{L}_k^{(\mathrm{NS})}(\ell, m-2r), \quad (r \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z},\ \ell+m \in 2\mathbb{Z}+1). \tag{7.92}$$

特に $\frac{1}{2}$ スペクトラル・フローについて次の指標の関係式はよく用いられるのであらわに書いておこう；

$$q^{\frac{\hat{c}}{8}} y^{\frac{\hat{c}}{2}} \mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\mathrm{NS})}\left(\tau, z+\frac{\tau}{2}\right) = \mathrm{ch}_{\ell,m-1}^{(\mathrm{R})}(\tau, z). \tag{7.93}$$

$\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2}$ のモジュラー不変分配関数は，やはりコセット指標 $\chi_m^{\ell,s}(\tau,z)$ を用いて構成するのが便利である．$SU(2)$ のパラフェルミオン模型のように，$\widehat{SU}(2)$ のモジュラー不変分配関数のADE分類とテータ関数のモジュラー不変係数を用いて完全にモジュラー不変分配関数を分類することが可能である．最も簡単なモジュラー不変分配関数は，もちろん対角型(A型)のものであり次式で表される；

$$\begin{aligned} Z(\tau,\bar{\tau}) &= \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{k}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2(k+2)}}\sum_{s\in\mathbb{Z}_4}\left|\chi_m^{\ell,s}(\tau,0)\right|^2 \\ &\equiv \frac{1}{4}\sum_{\sigma=\mathrm{NS},\widetilde{\mathrm{NS}},\mathrm{R},\widetilde{\mathrm{R}}}\sum_{\ell=0}^{k}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2(k+2)}}\left|\mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\sigma)}(\tau,0)\right|^2. \end{aligned} \tag{7.94}$$

1行目の $\frac{1}{2}$ は再び場の同一視(7.80)による数えすぎを相殺する因子である．2行目では，さらにGSO射影からくる $\frac{1}{2}$ の因子が存在し，全体で $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ の因子となっている．

例　$k=1$ ユニタリ・ミニマル模型

例として最も簡単な $\mathcal{M}_1^{\mathcal{N}=2}$ を考えよう．この場合 $c=1$ $(\hat{c}=\frac{1}{3})$ となるので，1成分の自由ボソン場で記述されることが予想される．実際，自由ボソン場 $X(z)$ を用いて，$c=1$ の $\mathcal{N}=2$ SCA が次のように構成できる($\alpha'=2$ とおき，場の規格化は $X(z)X(0)\sim -\ln z$ とする)；

$$T(z)=-\frac{1}{2}:(\partial X(z))^2:,\ \ J(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}i\partial X(z),\ \ G^{\pm}(z)=\sqrt{\frac{2}{3}}:e^{\pm i\sqrt{3}X(z)}: \tag{7.95}$$

さらに，プライマリー場のスペクトルを調べてみると，「場の同一視」(7.83)のもとで独立なものは表 7.5 のようになる．

表 7.5 プライマリー場のスペクトル

NS セクター	$(\ell,m)=(0,0),\ h=0,\ Q=0$	$(\ell,m)=(1,\pm1),\ h=\frac{1}{6},\ Q=\pm\frac{1}{3}$
R セクター	$(\ell,m)=(1,0),\ h=\frac{3}{8},\ Q=\pm\frac{1}{2}$,	$(\ell,m)=(1,\pm2),\ h=\frac{1}{24},\ Q=\pm\frac{1}{6}$

ここで $(\ell,m)\cong(1-\ell,m+3)$ は量子数を表す．共形ウェイト h，$U(1)$ 電荷 Q ($Q=\widetilde{Q}\pm\frac{1}{2}$) は，(7.68)，(7.70)で与えられる．R セクターの表現 $(\ell,m)=(1,0)$ は 2 重縮退であり，$(\ell,m)=(1,2)$，$(1,-2)$ はそれぞれラモン真空である．指標公式(7.81)からただちに，

$$\begin{aligned}
&\chi_0^{0,0}(\tau,z)=\frac{\Theta_{0,6}\left(\tau,\frac{z}{3}\right)}{\eta(\tau)},\quad \chi_0^{0,2}(\tau,z)=\frac{\Theta_{6,6}\left(\tau,\frac{z}{3}\right)}{\eta(\tau)},\\
&\chi_{\pm1}^{1,0}(\tau,z)=\frac{\Theta_{\pm2,6}\left(\tau,\frac{z}{3}\right)}{\eta(\tau)},\quad \chi_{\pm1}^{1,2}(\tau,z)=\frac{\Theta_{\mp4,6}\left(\tau,\frac{z}{3}\right)}{\eta(\tau)},\\
&\chi_0^{1,\pm1}(\tau,z)=\frac{\Theta_{\mp3,6}\left(\tau,\frac{z}{3}\right)}{\eta(\tau)},\quad \chi_{\pm2}^{1,\pm1}(\tau,z)=\frac{\Theta_{\pm1,6}\left(\tau,\frac{z}{3}\right)}{\eta(\tau)},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \chi_{\pm2}^{1,\mp1}(\tau,z)=\frac{\Theta_{\mp5,6}\left(\tau,\frac{z}{3}\right)}{\eta(\tau)},
\end{aligned} \tag{7.96}$$

が得られる(k=1 のときストリング関数は 1 に等しいことに注意)．そして，(対角的)モジュラー不変分配関数は(7.94)により，

$$Z_{\mathcal{M}_1^{\mathcal{N}=2}}(\tau,\bar{\tau})=\frac{1}{4}\sum_{\ell=0,1}\sum_{m\in\mathbb{Z}_6}\sum_{s\in\mathbb{Z}_4}\left|\chi_m^{\ell,s}(\tau,0)\right|^2=\sum_{m\in\mathbb{Z}_{12}}\left|\frac{\Theta_{m,6}(\tau,0)}{\eta(\tau)}\right|^2, \tag{7.97}$$

である．こうして，$k=1$ の $\mathcal{N}=2$ ミニマル模型 $\mathcal{M}_1^{\mathcal{N}=2}$ は，半径 $R=\sqrt{6\alpha'}=2\sqrt{3}$ のコンパクト・ボソンと等価であることがわかった*5．

さて，予告したように $m=4$ の $\mathcal{N}=1$ ミニマル模型 $\mathcal{M}_4^{\mathcal{N}=1}$ との関係について述べよう．$\mathcal{M}_4^{\mathcal{N}=1}$ モデルも $c=1$ を持ち，プライマリー場の共形ウェイトのスペクトルを 7.1.3 項で与えたものと比較すると，部分的に一致していることが見てとれる．これらの事実は 2 つの模型の関連を示唆しているが，正確にはどのような関係にあるであろうか？ 正解を述べると，$\mathcal{M}_4^{\mathcal{N}=1}$ は，半径 $R=\sqrt{6\alpha'}=2\sqrt{3}$ のコンパクト・ボソン ($\cong\mathcal{M}_1^{\mathcal{N}=2}$) の $\mathbb{Z}_2$ オービフォルドと等価である．上で述べたように，このコンパクト・ボソンは $\mathcal{N}=2$ の SCA(7.95) を持つが，「折り返し」$\sigma: X\to -X$ によってオービフォルドをとると，σ 不変な部分代数 $\{T, G\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\left(G^++G^-\right)\}$ だけが生き残ることになり，これは $c=1$ の $\mathcal{N}=1$ SCA をなす．オービフォルド化によって $\mathcal{N}=2$ の $h=0$ の表現は，$\mathcal{N}=1$ の $h=0$ 及び $h=1$ の表現に既約分解され，さらにオービフォルドの twisted sector から $h=\frac{1}{16}$，$h=\frac{9}{16}$ のプライマリー場が現れるのである．参考までにこの様子を指標のレベルで詳しく見てみよう．

証明は非自明であるが，指標公式(7.30)は $m=4$ のケースでは次のように書きなおすことができる；

$$
\begin{aligned}
&\chi_{1,1}^{\mathrm{NS},(4)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\Theta_{0,6}+\Theta_{6,6}}{\eta}+\sqrt{\frac{2\eta}{\theta_2}}\right\},\quad \chi_{1,1}^{\widetilde{\mathrm{NS}},(4)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\Theta_{0,6}-\Theta_{6,6}}{\eta}+\sqrt{\frac{2\eta}{\theta_2}}\right\},\\
&\chi_{1,5}^{\mathrm{NS},(4)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\Theta_{0,6}+\Theta_{6,6}}{\eta}-\sqrt{\frac{2\eta}{\theta_2}}\right\},\quad \chi_{1,5}^{\widetilde{\mathrm{NS}},(4)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\Theta_{0,6}-\Theta_{6,6}}{\eta}-\sqrt{\frac{2\eta}{\theta_2}}\right\},\\
&\chi_{1,3}^{\mathrm{NS},(4)}=\frac{\Theta_{2,6}+\Theta_{-4,6}}{\eta},\quad \chi_{1,3}^{\widetilde{\mathrm{NS}},(4)}=\frac{\Theta_{2,6}-\Theta_{-4,6}}{\eta},\\
&\chi_{2,1}^{\mathrm{R},(4)}=\sqrt{2}\,\frac{\Theta_{3,6}}{\eta},\ \chi_{2,3}^{\mathrm{R},(4)}=\frac{\Theta_{1,6}+\Theta_{-5,6}}{\eta},\ \chi_{2,2}^{\mathrm{NS},(4)}=\sqrt{\frac{\eta}{\theta_4}},\ \chi_{2,2}^{\widetilde{\mathrm{NS}},(4)}=\sqrt{\frac{\eta}{\theta_3}},\\
&\chi_{1,2}^{\mathrm{R},(4)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\eta}{\theta_4}}+\sqrt{\frac{\eta}{\theta_3}}\right),\quad \chi_{1,4}^{\mathrm{R},(4)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\eta}{\theta_4}}-\sqrt{\frac{\eta}{\theta_3}}\right).
\end{aligned}
\tag{7.98}
$$

*5　5.2.1 項参照.

さらに $\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターの指標は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{2,3}^{\widetilde{\mathrm{R}},(4)} = \frac{\Theta_{1,6}-\Theta_{-5,6}}{\eta} = \frac{\widetilde{\Theta}_{1/2,3/2}}{\eta} = 1,$$
$$\chi_{\mathrm{others}}^{\widetilde{\mathrm{R}},(4)} = 0, \tag{7.99}$$

となる．ここで1行目はラモン真空であり，恒等式(A.32)を用いた．以上を用いると，モジュラー不変分配関数(7.29)は次のように計算される；

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{M}_4^{\mathcal{N}=1}}(\tau,\bar{\tau}) &= \frac{1}{4}\sum_{\sigma}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{5}\left|\chi_{r,s}^{\sigma,(4)}(\tau)\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{12}}\left|\frac{\Theta_{m,6}}{\eta}\right|^2+\left|\frac{\eta}{\theta_2}\right|+\left|\frac{\eta}{\theta_3}\right|+\left|\frac{\eta}{\theta_4}\right|. \end{aligned} \tag{7.100}$$

これは期待通り半径 $\sqrt{6\alpha'}=2\sqrt{3}$ の円周のオービフォルド CFT の分配関数と一致する．

コメント

$\mathcal{N}$=2 ユニタリ・ミニマル模型と単純特異点　$\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2}$ のカイラル・プライマリー場を調べてみよう．まずは対角型のモジュラー不変分配関数を仮定する．(7.68)のスペクトルにおいて $m=\ell$ の状態がカイラル・プライマリーであるから，量子数

$$Q = 2h = \frac{\ell}{k+2}, \quad \ell = 0,1,\cdots,k,$$

を持つ $(k+1)$ 個のカイラル・プライマリー場 ϕ_ℓ が存在することになる．ここで，ϕ_0 は恒等演算子 $\mathbf{1}$ と同一視する．既に述べたように，カイラル・プライマリー場全体は同一点の演算子積が特異性なしに定義され，カイラル・リングを生成する．$\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2}$ においては，カイラル・リングの構造は単純であり，$U(1)$ 電荷の保存則からただちに，

$$\phi_i\cdot\phi_j = \begin{cases} \phi_{i+j} & (i+j \le k), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となることがわかる．したがって，$\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2}$ のカイラル・リング $\mathcal{R}_k \equiv \{\phi_\ell\}_{\ell=0,\cdots,k}$ は，1 変数 x の多項式環に同値関係 $x^{k+1}\simeq 0$ をおいた剰余環と同定される；

$$\mathcal{R}_k \cong \mathbb{C}[x]/(x^{k+1}).$$

つまり，カイラル・プライマリー場 ϕ_ℓ は単項式 x^ℓ と同定されるのである．この環は

表 7.6 単純特異点：特異曲面の方程式は $W=0$ であり，$x=y=z=0$ に特異点が存在する．$U(1)$ 電荷は $[W]=1$ と規格化されている．

	W	$U(1)$ 電荷			コクセター数
A_{k+1}	$x^{k+2}+y^2+z^2$	$[x]=\dfrac{1}{k+2}$	$[y]=\dfrac{1}{2}$	$[z]=\dfrac{1}{2}$	$k+2$
D_k	$x^2y+y^{k-1}+z^2$	$[x]=\dfrac{k-2}{2(k-1)}$	$[y]=\dfrac{1}{k-1}$	$[z]=\dfrac{1}{2}$	$2(k-1)$
E_6	$x^3+y^4+z^2$	$[x]=\dfrac{1}{3}$	$[y]=\dfrac{1}{4}$	$[z]=\dfrac{1}{2}$	12
E_7	$x^3+xy^3+z^2$	$[x]=\dfrac{1}{3}$	$[y]=\dfrac{2}{9}$	$[z]=\dfrac{1}{2}$	18
E_8	$x^3+y^5+z^2$	$[x]=\dfrac{1}{3}$	$[y]=\dfrac{1}{5}$	$[z]=\dfrac{1}{2}$	30

(複素) 2 次元曲面における A_{k+1} 型単純特異点の「ヤコビ環」として知られるものである．

この対応は自然な拡張を持つ．既に述べたように，$\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2}$ のモジュラー不変分配関数には $\widehat{SU}(2)_k$ に起因する ADE 分類が存在し，それぞれの場合にカイラル・プライマリー場の $U(1)$ 電荷は ADE 型リー代数の指数と 1 対 1 対応を持つ(指数については，表 3.1 を参照)．一方，2 次元曲面の単純特異点にも ADE 分類が知られており，それを表 7.6 にまとめた．ヤコビ環は，表の多項式 W を用いて，

$$\mathcal{R}=\mathbb{C}[x,y,z]/(\partial_x W,\partial_y W,\partial_z W)$$

と表され，ADE 分類を通じて対応する $\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2}$ のカイラル・リングと同型になることが知られている．また，カイラル・プライマリー場の $U(1)$ 電荷は，表にある x，y，z の $U(1)$ 電荷から読み取ることができる．

この興味深い事実は，「$\mathcal{N}=2$ 超対称ランダウ・ギンツブルグ模型」を用いることによって，より明快に議論することができるが，本書では割愛する．文献 [75, 69] などを参照されたい．

7.3 $\mathcal{N}=2$ 超共形場理論の周辺の話題

本節では，紙数の関係で詳しく解説することができない $\mathcal{N}=2$ 超共形場理論に関連する重要なトピックについて概説したい．

7.3.1 ゲプナー模型

$\mathcal{N}=2$ ミニマル模型の超弦理論への重要な応用として**ゲプナー模型** [76] について簡単に解説しよう．超弦理論の代表的な真空解として，複素 d 次元のカラビ・ヤウ多様体へのコンパクト化が知られており，世界面上の共形場理論の見地からは，$\hat{c}=d$ の $\mathcal{N}=2$ SCFT によって記述される．ゲプナー模型とは $\mathcal{N}=2$ ミニマル模型のテンソル積によって，カラビ・ヤウ多様体上の超弦理論を実現する方法である．世界面上の場の量子論の意味では厳密な解析が可能であるため，超弦理論に広く応用されている．$\mathcal{N}=2$ ミニマル模型のテンソル積：

$$\bigotimes_{i=1}^{r} \mathcal{M}_{k_i}^{\mathcal{N}=2}, \qquad \hat{c}=\sum_{i=1}^{r}\frac{k_i}{k_i+2}, \tag{7.101}$$

から出発しよう．ここでトータルの $\hat{c}\left(\equiv\dfrac{c}{3}\right)$ は正の整数値であることを仮定する．おおまかに言うと，ゲプナー模型とは，このテンソル積の $\mathcal{N}=2$ SCFT に対し，**$U(1)$ 電荷が整数のセクターへの射影を取る**ことによって定義される理論である．$U(1)$ 電荷が整数の状態のみを選び出すことによって，カラビ・ヤウ多様体上の超対称非線形シグマ模型としての解釈が可能となり，また超弦理論のコンパクト化においては時空の超対称性が実現できるのである．より精密に言うと，この $U(1)$ 電荷の射影は，

$$N \equiv \mathrm{L.C.M}\{\, k_i+2 \ : \ i=1,\cdots,r\,\}, \tag{7.102}$$

とおくとき，単純なミニマル模型のテンソル積(7.101)に対し，$\mathbb{Z}_N$ オービフォルド化として働く．すなわち，ゲプナー模型とは schematic に言うと，

$$\mathcal{M}_{\mathrm{Gepner}}(k_1,k_2,\cdots,k_r) \equiv \left.\bigotimes_{i=1}^{r}\mathcal{M}_{k_i}^{\mathcal{N}=2}\right|_{\mathbb{Z}_N\ \text{オービフォルド}},$$

ということになるが，簡単に $\mathcal{N}=2$ ミニマル模型をレベルの値で表示し，$(k_1)(k_2)\cdots(k_r)$ と表したり，さらに k_i のなかで同じものをまとめて，$(k_1)^{m_1}\cdots(k_l)^{m_l}$ と表記されることも多い．オービフォルドの一般論に従うと，射影を取るだけではモジュラー不変性と矛盾してしまうため，twisted sector を考慮する必要がある．この $\mathbb{Z}_N$ オービフォルド化の手続きは $\mathcal{N}=2$ の整数スペクトラル・フローを用いて簡明に理解される．以下この点について概説しよう．

テンソル積(7.101)のモジュラー不変分配関数から出発しよう；

$$Z_{\mathcal{M}_{k_1}^{\mathcal{N}=2}\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_{k_r}^{\mathcal{N}=2}}(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=\mathrm{NS},\widetilde{\mathrm{NS}},\mathrm{R},\widetilde{\mathrm{R}}}\sum_{I,\tilde{I}} N_{I\tilde{I}}\,\chi_I^{(\sigma)}(\tau,0)\overline{\chi_{\tilde{I}}^{(\sigma)}(\tau,0)}, \tag{7.103}$$

$$\chi_I^{(\sigma)}(\tau,z) \equiv \prod_{i=1}^{r}\mathrm{ch}_{\ell_i,m_i}^{(\sigma)}(\tau,z), \quad \left(I\equiv\{(\ell_i,m_i)\},\ \tilde{I}\equiv\{(\tilde{\ell}_i,\tilde{m}_i)\}\right).$$

ここですべてのミニマル模型でスピン構造はそろっており，また対角型のGSO射影を採用している．$N_{I\tilde{I}}$ は一般的なモジュラー不変係数であり，最も単純な対角型を選ぶと，

$$N_{I\tilde{I}} \equiv \prod_{i=1}^{r}\frac{1}{2}\delta_{\ell_i\tilde{\ell}_i}\delta_{m_i\tilde{m}_i}^{(2(k_i+2))}, \tag{7.104}$$

である．記号 $\delta_{ab}^{(M)}$ は，mod M のクロネッカーのデルタである．やはり場の同一視(7.80)による数え過ぎを相殺するための $(1/2)^r$ の因子を挿入してある．また，便宜上，

$$\mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\mathrm{NS})}(\tau,z)\equiv\mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\widetilde{\mathrm{NS}})}(\tau,z)\equiv 0, \quad (\ell+m\in 2\mathbb{Z}+1),$$
$$\mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\mathrm{R})}(\tau,z)\equiv\mathrm{ch}_{\ell,m}^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\tau,z)\equiv 0, \quad (\ell+m\in 2\mathbb{Z}),$$

と約束しておく．上で述べたように，ゲプナー模型はこの模型の $\mathbb{Z}_N$ オービフォルドとして定義される．詳細な議論は割愛するが，ゲプナー模型の最終的なモジュラー不変分配関数は次式によって与えられる*6；

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{Gepner}}(\tau,\bar{\tau}) &= \frac{1}{2N^3}\sum_{\sigma=\mathrm{NS},\widetilde{\mathrm{NS}},\mathrm{R},\widetilde{\mathrm{R}}}\ \sum_{a,b,\tilde{a},\tilde{b}\in\mathbb{Z}_N}\sum_{I,\tilde{I}} N_{I\tilde{I}}\,\chi_{I,[a,b]}^{(\sigma)}(\tau,0)\overline{\chi_{\tilde{I},[\tilde{a},\tilde{b}]}^{(\sigma)}(\tau,0)} \\ &\equiv \frac{1}{2N}\sum_{\sigma=\mathrm{NS},\widetilde{\mathrm{NS}},\mathrm{R},\widetilde{\mathrm{R}}}\ \sum_{a,b\in\mathbb{Z}_N}\sum_{I,\tilde{I}} N_{I\tilde{I}}\,\chi_{I,[a,b]}^{(\sigma)}(\tau,0)\overline{\chi_{\tilde{I}}^{(\sigma)}(\tau,0)}. \end{aligned} \tag{7.105}$$

ここで，$a,b,\tilde{a},\tilde{b}\in\mathbb{Z}_N$ は空間方向及び(虚)時間方向のツイストを表すパラメー

---

*6 ゲプナー模型のモジュラー不変分配関数の構成については，いわゆる「単純カレント」(simple current)を利用した「β 処方」もよく用いられる．オリジナルのゲプナーの論文 [76] もその立場で書かれているが，初学者にはかえってわかりにくいと思われるので本書では触れない(たとえば [9] のテキストなどを参照されたい)．ここでの議論は本質的に文献 [77] によっており，もちろん β 処方と等価である．

タであり，スペクトラル・フローを用いて，

$$\chi^{(\sigma)}_{I,[a,b]}(\tau,z) \equiv \epsilon_\sigma(a,b) q^{\frac{\hat{c}}{2}a^2} y^{\hat{c}a} \chi^{(\sigma)}_I(\tau, z+a\tau+b), \quad (a,b\in\mathbb{Z}), \qquad (7.106)$$

$$\epsilon_\sigma(a,b) \equiv \begin{cases} 1 & (\sigma=\mathrm{NS}), \\ (-1)^{\hat{c}a} & (\sigma=\widetilde{\mathrm{NS}}), \\ (-1)^{\hat{c}b} & (\sigma=\mathrm{R}), \\ (-1)^{\hat{c}(a+b)} & (\sigma=\widetilde{\mathrm{R}}), \end{cases} \qquad (7.107)$$

と定義されている．位相因子 $\epsilon_\sigma(a,b)$ は，モジュラー不変性のために必要な因子であり，正しい $\mathbb{Z}_N$ 周期性

$$\chi^{(\sigma)}_{I,[a+mN,b+nN]}(\tau,z) = \chi^{(\sigma)}_{I,[a,b]}(\tau,z), \quad ({}^\forall m,n\in\mathbb{Z}) \qquad (7.108)$$

を実現している．

(7.105)がモジュラー不変であることを示すためには(7.108)に加え，次の事実に着目すればよい；

（i） $\chi^{(\sigma)}_I(\tau,z)$ のモジュラー変換則は $\mathcal{N}$=2 ミニマル模型のモジュラー変換則から容易に導くことができ，それを，

$$\chi^{(\sigma)}_I\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right) = e^{i\pi\frac{\hat{c}z^2}{\tau}} \kappa_\sigma \sum_J S_{I,J}\, \chi^{(S\cdot\sigma)}_J(\tau,z),$$

$$(\kappa_\sigma \equiv e^{-\frac{i\pi\hat{c}}{2}} \ (\sigma=\widetilde{\mathrm{R}}\text{ のとき}), \quad \kappa_\sigma\equiv 1 \ (\text{その他})),$$

$$\chi^{(\sigma)}_I(\tau+1,z) = e^{2\pi i\left(h_I-\frac{\hat{c}}{8}\right)} \chi^{(T\cdot\sigma)}_I(\tau,z),$$

と表すとき，スペクトラル・フローされた指標 $\chi^{(\sigma)}_{I,[a,b]}(\tau,z)$ のモジュラー変換則が次のように書かれる；

$$\chi^{(\sigma)}_{I,[a,b]}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right) = e^{i\pi\frac{\hat{c}z^2}{\tau}} \kappa_\sigma \sum_J S_{I,J}\, \chi^{(S\cdot\sigma)}_{J,[b,-a]}(\tau,z), \qquad (7.109)$$

$$\chi^{(\sigma)}_{I,[a,b]}(\tau+1,z) = e^{2\pi i\left(h_I-\frac{\hat{c}}{8}\right)} \chi^{(T\cdot\sigma)}_{I,[a,a+b]}(\tau,z). \qquad (7.110)$$

（ii） (7.103)がモジュラー不変であるとき，(7.109), (7.110)によって分配関数(7.105)もモジュラー不変になる．

いくつか重要なコメントを与えておく．

コメント　**$\mathbb{Z}_N$ オービフォルド化の意味について**　ここでの $\mathbb{Z}_N$ オービフォルド化の意味について考えてみよう．分配関数(7.105)の表式において，添え字 b についての足し上げは，$U(1)$ 電荷に関する射影演算子：

$$\frac{1}{N}\sum_{b\in\mathbb{Z}_N} e^{2\pi i b J_{\mathrm{tot},0}}$$

を NS セクターのトレースに挿入することを意味し，トータルの $U(1)$ 電荷が整数値を取る状態のみを選び出す(J_{tot} は各ミニマル模型 $\mathcal{M}^{\mathcal{N}=2}_{k_i}$ の $U(1)$ カレントの総和．N の定義(7.102)より，$J_{\mathrm{tot},0}$ の固有値は $\dfrac{1}{N}\mathbb{Z}$ に値を取ることに注意)．一方，スペクトラル・フローから生成される $a\neq 0$ のセクターがオービフォルドの twisted sector に相当し，このセクターの存在がモジュラー不変性を保証している．分配関数(7.105)の表式が示すように，ゲプナー模型は非対角型のモジュラー不変係数を持つという事実を強調しておく．なお，位相因子 $\epsilon_\sigma(a,b)$ の存在のために，R セクターにおいてはゲプナー模型の $\mathbb{Z}_N$ 射影は，トータルの $U(1)$ 電荷が必ずしも整数値ではなく，

$$Q_{\mathrm{tot}} \in \mathbb{Z}+\frac{\hat{c}}{2}$$

という条件を満たす状態を選び出すように働くことを注意しておく．これは，「$\dfrac{1}{2}$ スペクトラル・フローによって，NS セクターと R セクターが関係付く」という事実とも整合している．

コメント　**ゲプナー模型の幾何学的な側面について**　ゲプナー模型の幾何学的な側面について述べておく．$w_1,\cdots,w_r$ を r 個の互いに素な正の整数とし，複素 $(r-1)$ 次元の「重み付き射影空間」$\mathbb{CP}^{r-1}_{w_1,\cdots,w_r}$ を，$(\mathbb{C}^*)^r$ ($\mathbb{C}^*\equiv\mathbb{C}-\{0\}$)を次の同値関係で割った商空間として定義する；

$$(x_1,\cdots,x_r) \sim (\lambda^{w_1}x_1,\cdots,\lambda^{w_r}x_r), \quad (^\forall\lambda\in\mathbb{C}^*). \tag{7.111}$$

このとき，$N\equiv\sum_{i=1}^{r} w_i$ とおくと，$\mathbb{CP}^{r-1}_{w_1,\cdots,w_r}$ における N 次の同次超曲面が複素 $(r-2)$ 次元のカラビ・ヤウ多様体になることが知られている．すなわち，$W(x_1,\cdots,x_r)$ を，

$$W(\lambda^{w_1}x_1,\cdots,\lambda^{w_r}x_r) = \lambda^N W(x_1,\cdots,x_r),$$

を満たす x_i の多項式とするとき，$W(x_i)=0$ で定義される超曲面がカラビ・ヤウ多様体となるのである．これは簡明なカラビ・ヤウ空間の構成法であり，このように構成

されるカラビ・ヤウ空間を $\mathbb{CP}^{r-1}_{w_1,\cdots,w_r}[N]$ といった記号で表すことがある．特に $W(x_i)$ が単純な単項式の和；

$$W(x_i) = x_1^{a_1}+\cdots+x_r^{a_r}, \quad (a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 2}), \tag{7.112}$$

で書かれる場合，「フェルマー型超曲面」(フェルマー型カラビ・ヤウ空間) と呼ばれる．ここで，$W(x_i)$ が ($\mathbb{CP}^{r-1}_{w_1,\cdots,w_r}$ における) N 次の同次多項式であることから，

$$N = \text{L.C.M}\,\{a_i\}, \quad a_i \equiv \frac{N}{w_i},$$

の関係が成り立つ．実は複素 d 次元のフェルマー型カラビ・ヤウ空間 (r=d+2) 上で定義された $\mathcal{N}$=2 超対称非線形シグマ模型と $\hat{c}$=d, r=d+2 のゲプナー模型 $(k_1)\cdots(k_r)$ が，対応

$$a_i = k_i+2$$

のもとで等価になることが知られている．実際すぐに確かめられるように，中心電荷の条件式

$$\sum_{i=1}^{d+2} \frac{k_i}{k_i+2} = d,$$

は，カラビ・ヤウ条件

$$\sum_{i=1}^{d+2} w_i \left(\equiv \sum_{i=1}^{d+2} \frac{N}{a_i}\right) = N,$$

と同値である．記号的に表すと，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{CP}^{d+1}_{w_1,\cdots,w_{d+2}}[N] \cong (k_1)\cdots(k_{d+2}),\\
&N \equiv \text{L.C.M}\ \ \{k_i+2\}, \quad N = w_1(k_1+2) = \cdots = w_{d+2}(k_{d+2}+2),
\end{aligned}$$

となり*7，たとえば，よく知られた CY_3 の例である $\mathbb{CP}^4$ $\left(\cong\mathbb{CP}^4_{1,1,1,1,1}\right)$ における 5 次超曲面は，ゲプナー模型 $(3)^5$，また $K3$ 曲面の例である $\mathbb{CP}^3$ における 4 次超曲面は $(2)^4$ 模型によって記述される．

ここで述べたゲプナー模型とフェルマー型のカラビ・ヤウ空間との対応は，$\mathcal{N}$=2 ランダウ・ギンツブルグ模型とカラビ・ヤウ空間上の $\mathcal{N}$=2 超対称非線形シグマ模型の等価性を用いてエレガントに理解することができる．文献 [78, 79] などを参照されたい．

---

*7　この等価性はミニマル模型の中に trivial なもの (つまり k_i=0) が混ざっていても成立する．たとえば，3 次元カラビ・ヤウ多様体 $\mathbb{CP}^4_{1,1,1,2,5}[10]$ は $(8)^3(3)$ $\left(\cong(8)^3(3)(0)\right)$ と等価であり，同様に $K3$ 曲面 $\mathbb{CP}^3_{1,1,1,3}[6]$ は，ゲプナー模型 $(4)^3$ $\left(\cong(4)^3(0)\right)$ と等価である．

7.3.2 楕円種数

よく知られているように，超対称性を持つ力学系において，超対称真空を数え上げるウィッテン指数は重要な役割を果たす．$\mathcal{N}=2$ SCFT においては，$U(1)$ カレント $J(z)$ が存在するために，ウィッテン指数の自然な拡張が存在し，**楕円種数**(elliptic genus)と呼ばれる [81]．楕円種数は超対称真空ばかりでなく部分的に超対称性を保つ励起状態(BPS 状態)の縮重度についても詳細な情報を与える．また，理論の超共形対称性を保つ変形(marginal deformation)に対して不変に保たれるという性質を持ち，超弦理論においてはターゲット空間の位相不変量と密接な関係を持つ．

楕円種数の定義を述べるために，$\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターの分配関数

$$Z^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\tau,\bar{\tau};z,\bar{z}) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{(\mathrm{R})}\otimes\overline{\mathcal{H}^{(\mathrm{R})}}}\left[(-1)^{F+\widetilde{F}} q^{L_0-\frac{c}{24}}\bar{q}^{\widetilde{L}_0-\frac{c}{24}} e^{2\pi i z J_0} e^{2\pi i \bar{z}\widetilde{J}_0}\right], \tag{7.113}$$

を考えよう．$\mathcal{H}^{(\mathrm{R})}$，$\overline{\mathcal{H}^{(\mathrm{R})}}$ はそれぞれ正則，反正則部分の R セクターのヒルベルト空間であり，$\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターなので $(-1)^{F+\widetilde{F}}$ を挿入してトレースを取る．ここで，$Z(\tau,\bar{\tau};0,0)$ がウィッテン指数であり，ラモン真空の縮重度を与える．すなわち，$(-1)^{F+\widetilde{F}}$ の挿入のおかげで，$L_0=\widetilde{L}_0=\dfrac{c}{24}$ を満たすラモン真空以外の励起状態からの寄与はすべてボソンとフェルミオンで相殺してしまうのである．より一般に，$Z^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\tau,\bar{\tau};z,\bar{z})$ において，$\bar{z}=0$ とおくが z は一般の値として残したものを楕円種数と定義し，以下 $Z(\tau,z)$ と書くことにする；

$$Z(\tau,z) \equiv Z^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\tau,\bar{\tau};z,0). \tag{7.114}$$

$\bar{z}=0$ とおいているので，反正則部分についてはやはり $\widetilde{L}_0=\dfrac{c}{24}$ のラモン真空しか寄与せず，したがって $Z(\tau,z)$ は τ について正則であると期待される．つまり，楕円種数は反正則部分がラモン真空であるような状態；

$$\widetilde{G}_0^+|\alpha\rangle = \widetilde{G}_0^-|\alpha\rangle = 0,$$

を(符号付きで)数え上げていることになる．このような状態は超対称性を部分的に保つ BPS 状態の例である．もう少し精密に述べるために，$Z(\tau,z)$ をべき級数展開すると，

$$Z(\tau,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ell\in\mathbb{Z}} c(n,\ell)q^n y^\ell, \quad (c(n,\ell)\in\mathbb{Z}), \tag{7.115}$$

という形となる．そして整数係数の絶対値 $|c(n,\ell)|$ は，

$$L_0=n+\frac{c}{24}, \quad J_0=\ell,$$

となる BPS 状態の縮重度を与えている．

楕円種数は $U(1)$ 電荷に結合するパラメータ z の値を特殊化することによって，いろいろな位相不変量と関連している．具体的には，

$$\chi=Z(\tau,0)\ :（オイラー数）, \quad \sigma=Z\left(\tau,\frac{1}{2}\right)\ :（ヒルツェブルフ符号数）,$$
$$\hat{A}=q^{\frac{\hat{c}}{8}}Z\left(\tau,\frac{\tau+1}{2}\right)\ :（ディラック指数）, \tag{7.116}$$

などである．

次に楕円種数の重要な代数的性質について述べよう．楕円種数は次のモジュラー変換性を持つことが知られている；

$$Z\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)=e^{i\pi\hat{c}\frac{cz^2}{c\tau+d}}Z(\tau,z)\ , \quad {}^{\forall}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2;\mathbb{Z}). \tag{7.117}$$

すなわち，

$$Z(\tau+1,z)=Z(\tau,z)\ ,$$
$$Z\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right)=e^{i\pi\frac{\hat{c}z^2}{\tau}}Z(\tau,z). \tag{7.118}$$

さらに，$\hat{c}$ が正の整数のとき，スペクトラル・フローに対し次のようにふるまう（擬 2 重周期性）；

$$q^{\frac{\hat{c}}{2}a^2}y^{\hat{c}a}Z(\tau,z+a\tau+b)=(-1)^{\hat{c}(a+b)}Z(\tau,z)\ , \quad {}^{\forall}a,b\in\mathbb{Z}. \tag{7.119}$$

一般に収束べき級数(7.115)が性質(7.117)及び(7.119)を持つとき，重み(weight) 0，指数(index) $\dfrac{\hat{c}}{2}$ の**弱ヤコビ形式**(weak Jacobi form)であると言

う*8．擬2重周期性(7.119)のために，べき級数(7.115)の係数 $c(n,\ell)$ は実際は $2\hat{c}n-\ell^2$ のみの関数であることがわかる．これらの性質により，$\hat{c}$ が比較的小さな値の $\mathcal{N}=2$ SCFT においては，楕円種数の関数形はほとんど決まってしまう．

楕円種数の具体例を見てみよう：

例1　$\hat{c}=2$：$K3$ 曲面

$\hat{c}=2$ の代表的な $\mathcal{N}=2$ SCFT として，$K3$ 曲面をターゲット空間とする非線形シグマ模型が知られており，その楕円種数は次のように与えられる [77, 82]；

$$Z_{K3}(\tau,z)=24\wp(z)\vartheta(z)^2\equiv 8\left[\left(\frac{\theta_3(\tau,z)}{\theta_3(\tau)}\right)^2+\left(\frac{\theta_4(\tau,z)}{\theta_4(\tau)}\right)^2+\left(\frac{\theta_2(\tau,z)}{\theta_2(\tau)}\right)^2\right]$$
$$\equiv 24\left(\frac{\theta_3(\tau,z)}{\theta_3(\tau)}\right)^2+2\frac{\theta_2^4(\tau)-\theta_4^4(\tau)}{\eta(\tau)^4}\left(\frac{\theta_1(\tau,z)}{\eta(\tau)}\right)^2 . \qquad (7.120)$$

ここで，$\wp(z)$ は $\wp$ 関数(A.36)であり，$\vartheta(z)\equiv\dfrac{\theta_1(\tau,z)}{\partial_z\theta_1(\tau,0)}\left(\equiv\dfrac{\theta_1(\tau,z)}{2\pi\eta(\tau)^3}\right)$ とおいた．また，2つ目と3つ目の等号には，付録の恒等式(A.46)，(A.47)を用いている．重み0，指数 $\dfrac{\hat{c}}{2}=1$ の弱ヤコビ形式は，定数倍を除き一意的であるため，全体の因子24を除き $K3$ の楕円種数はその変換性のみから決まってしまう*9．(7.120)を(7.115)のように $q\,(\equiv e^{2\pi i\tau})$，$y\,(\equiv e^{2\pi iz})$ について2重級数展開すれば，BPS状態の縮重度に関する情報を得ることができ，これらは $K3$ 曲面のモジュライにはよらない位相不変量である．さらに，z-パラメータ

*8　モジュラー変換性が(7.117)の代わりに，

$$Z\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^k e^{2\pi ir\frac{cz^2}{c\tau+d}}\,Z(\tau,z),$$

となるとき，重み k，指数 r の弱ヤコビ形式であるという．重み k の弱ヤコビ形式は $z=0$ とおくとき重み k のモジュラー形式であり，複素上半平面 $\mathbb{H}\equiv\{\tau\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}\tau>0\}$ 上の k 次の正則微分形式と同一視されることに注意しよう．また，弱ヤコビ形式(7.115)の係数 $c(n,\ell)$ が，$\ell^2\leq 2\hat{c}$ を満たす n，ℓ に対してのみゼロでない場合，**ヤコビ形式**であると言う．詳細は文献 [13] を参照.

*9　物理的に直接(7.120)を導出するには，楕円種数がターゲット空間のモジュライによらないという事実から，$K3$ 曲面を $T^4/\mathbb{Z}_2$ オービフォルドとみなして，$\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターの分配関数を z-パラメータ入りで計算してみればよい．

を特殊化し，q 展開することにより，(7.116)で与えた位相不変量は次のように計算される；

$$\chi = 24, \quad \sigma = 16\left(1+32q+256q^2+1408q^3+6144q^4+\cdots\right),$$
$$\hat{A} = 2q^{-\frac{1}{4}}\left(-1+20q^{\frac{1}{2}}+62q+216q^{\frac{3}{2}}+641q^2+\cdots\right). \qquad (7.121)$$

例 2　$\hat{c}$=3：CY_3 多様体

$\hat{c}$=3 の代表的な $\mathcal{N}$=2 SCFT として，（複素）3 次元のカラビ・ヤウ多様体(CY_3)をターゲット空間とする非線形シグマ模型が有名であり，超弦理論のコンパクト化において重要な役割を果たす．やはり重み 0，指数 $\frac{\hat{c}}{2}=\frac{3}{2}$ の弱ヤコビ形式は定数倍を除き一意であり，楕円種数は CY_3 の種類によらず次の簡単な関数形を持つ [82]；

$$Z_{CY_3}(\tau,z) = -\frac{\chi}{2}\wp'(z)\vartheta(z)^3 \equiv \frac{\chi}{2}\frac{\theta_1(\tau,2z)}{\theta_1(\tau,z)} \equiv \frac{\chi}{2}\frac{\theta_2(\tau,z)\theta_3(\tau,z)\theta_4(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}. \qquad (7.122)$$

ここで，χ は CY_3 空間のオイラー数であり，付録の恒等式(A.45)を用いている．

例 3　ゲプナー模型

最後に一般のゲプナー模型の楕円種数の公式を与えておこう [82]；

$$Z_{\text{Gepner}}(\tau,z) = \frac{1}{N}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_N}\sum_{I,\tilde{I}} N_{I\tilde{I}}\,\chi^{(\widetilde{\mathrm{R}})}_{I,[a,b]}(\tau,z)\overline{\chi^{(\widetilde{\mathrm{R}})}_{\tilde{I}}(\tau,0)}. \qquad (7.123)$$

ここで $\chi^{(\widetilde{\mathrm{R}})}_{I,[a,b]}(\tau,z)$ は，(7.106)で与えられている．次の表式も便利である；

$$Z_{\text{Gepner}}(\tau,z) = \frac{1}{N}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_N} q^{\frac{\hat{c}}{2}a^2}y^{\hat{c}a}(-1)^{\hat{c}(a+b)}\prod_{i=1}^{r} Z^{(k_i)}(\tau,z+a\tau+b)$$
$$\equiv \frac{1}{N}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_N}(-1)^{\hat{c}(a+b+ab)}\prod_{i=1}^{r} Z^{(k_i)}_{[a,b]}(\tau,z). \qquad (7.124)$$

ここで，$Z^{(k)}(\tau,z)$ は $\mathcal{N}$=2 ミニマル模型 $\mathcal{M}_k^{\mathcal{N}=2}$ の楕円種数であり，

$$Z^{(k)}(\tau,z)\equiv\sum_{\ell=0}^{k}\mathrm{ch}^{(\widetilde{\mathrm{R}})}_{\ell,\ell+1}(\tau,z)=-\sum_{\ell=0}^{k}\mathrm{ch}^{(\widetilde{\mathrm{R}})}_{\ell,-(\ell+1)}(\tau,z)=\frac{\theta_1\left(\tau,\dfrac{k+1}{k+2}z\right)}{\theta_1\left(\tau,\dfrac{1}{k+2}z\right)},\tag{7.125}$$

$$Z^{(k)}_{[a,b]}(\tau,z)\equiv q^{\frac{1}{2}\frac{k}{k+2}z^2}y^{\frac{k}{k+2}a}e^{i\pi\frac{k}{k+2}ab}Z^{(k)}(\tau,z+a\tau+b).\tag{7.126}$$

である*10．(7.124)と(7.123)の等価性は容易に示されるので，読者は証明にチャレンジしてみられたい．

最後に，上で述べたゲプナー模型の幾何学的解釈と位相不変量の公式(7.116)を組み合わせると有用な帰結が得られるので述べておこう．計算の詳細は割愛するが([82] などを参照)，オイラー数(ウィッテン指数)の公式：$\chi=Z(\tau,0)$ を(7.124)に適用すると，ゲプナー模型 $(k_1)\cdots(k_r)$ ($\widehat{c}=\sum_{i=1}^{r}\dfrac{k_i}{k_i+2}$, $N\equiv\mathrm{L.C.M}\{k_i+2\}$)のオイラー数を与える公式として次式が得られる；

$$\chi=\frac{1}{N}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_N}(-1)^{(\widehat{c}+r)(a+b+ab)}\prod_{i\in S_{ab}}(k_i+1)\prod_{j\notin S_{ab}}(-1).\tag{7.127}$$

ここで，

$$S_{ab}\equiv\{1\le i\le r\ :\ a\in(k_i+2)\mathbb{Z}\ \text{かつ}\ b\in(k_i+2)\mathbb{Z}\},$$

という記号を導入した．特にフェルマー型の CY_d 空間 $\mathbb{CP}^{d+1}_{w_1,\cdots,w_{d+2}}[N]$ ($w_i\equiv\dfrac{N}{k_i+2}$, $\sum_{i=1}^{d+2}w_i=N\equiv\mathrm{L.C.M}\{k_i+2\}$) に対しては，$\widehat{c}=d$, $r=d+2$ より $\widehat{c}+r\in2\mathbb{Z}$ となるので，

$$\chi=\frac{1}{N}\sum_{a,b\in\mathbb{Z}_N}\prod_{i\in S_{ab}}\frac{N-w_i}{w_i}\prod_{j\notin S_{ab}}(-1),\tag{7.128}$$

となる．公式(7.128)は適切に特異点を解消した多様体 $\mathbb{CP}^{d+1}_{w_1,\cdots,w_{d+2}}[N]$ の幾何学的に求めたオイラー数と一致することが知られている．

---

*10 公式(7.125)の最後の等号は自明ではないが，数学的に証明するには，両辺の弱ヤコビ形式としての性質を比較することになる．この公式のラグランジアン場の理論としての物理的な導出については文献 [83] を参照．

7.3.3 トポロジカル・ツイスト

$\mathcal{N}=2$ SCFT の興味深い応用として**位相的場の理論**(Topological Field Theory(TFT))[84, 85] との関係を議論しよう．これは全ての相関関数が位相不変量となる場の量子論である．相関関数が時空の計量に依存しないため，エネルギーや運動量は常にゼロとなり，位相的場の理論においてはダイナミクスが存在しない．それにも関わらず，多くの具体例において位相的場の理論は非自明な数理物理的性質を示し，ダイナミカルな通常の場の量子論に対しても重要な知見を与える．

$\mathcal{N}=2$ SCFT と位相的場の理論との関係を見るために，少々天下り的であるが，$\mathcal{N}=2$ SCFT における「ツイストされた」エネルギー・運動量テンソルを次式で定義する [86]；

$$\widetilde{T}(z) \equiv T(z)+\frac{1}{2}\partial J(z).$$

容易に確認できるように，$\widetilde{T}(z)$ は中心電荷ゼロを持つ；

$$\widetilde{T}(z)\widetilde{T}(w) \sim \frac{2\widetilde{T}(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial\widetilde{T}(w)}{z-w}. \tag{7.129}$$

言い換えれば，ツイストされたエネルギー・運動量テンソル $\widetilde{T}(z)$ に対して矛盾なく拘束条件：$\widetilde{T}(z)\approx 0$ を課すことができる．このようにヒルベルト空間を制限することによって，ツイストされた理論が位相的場の理論を与えることが予想される．他の $\mathcal{N}=2$ 超共形代数の OPE (7.36) は，$\widetilde{T}(z)$ を用いて次のように書き直すことができる($\frac{1}{2}G^-$ を改めて G^- と書く)；

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(z)G^{\pm}(w) &\sim \frac{1}{2}\frac{(3\mp 1)G^{\pm}(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial G^{\pm}(w)}{z-w},\\
\widetilde{T}(z)J(w) &\sim \frac{\widehat{c}}{(z-w)^3}+\frac{J(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial J(w)}{z-w},\\
J(z)J(w) &\sim \frac{\widehat{c}}{(z-w)^2},\\
J(z)G^{\pm}(w) &\sim \pm\frac{G^{\pm}(w)}{z-w},\\
G^{+}(z)G^{-}(w) &\sim \frac{\widehat{c}}{(z-w)^3}+\frac{J(w)}{(z-w)^2}+\frac{\widetilde{T}(w)}{z-w},\\
G^{\pm}(z)G^{\pm}(w) &\sim 0.
\end{aligned} \tag{7.130}$$

このような $\widetilde{T}(z)$ に基づく共形場理論を考えることを**トポロジカル・ツイスト**(topological twist)と呼び，代数(7.129)，(7.130)をしばしば，「ツイストされた $\mathcal{N}=2$ 超共形代数」，あるいは「位相的共形代数」(topological conformal algebra)と呼ぶ．

トポロジカル・ツイストの意味をもう少し精密に把握するために，$\widetilde{T}(z)$ で測った共形ウェイト $\tilde{h}$ はもともとの値 h に対し，

$$\tilde{h} = h - \frac{1}{2}q, \tag{7.131}$$

とシフトすることに注目しよう(q は $U(1)$ 電荷)．したがって，$G^+(z)$ はウェイト1のプライマリー場，すなわちカレントとなり，その線積分は積分路によらずスカラー電荷 Q を定義する；

$$Q = \oint G^+(z)dz.$$

OPE $G^+(z)G^+(w) \sim 0$ より，ただちに $Q^2=0$ が従うことがわかるので，この Q を BRST 電荷と同定してみよう．そして通常の BRST 処方に従い，物理的ヒルベルト空間を Q に対するコホモロジーとして定義する；

$$\mathcal{H}_{\mathrm{TFT}} \equiv \{|\psi\rangle\,;\, Q|\psi\rangle = 0\} \,/\, \left\{|\psi\rangle = Q|\phi\rangle,\ {}^{\exists}|\phi\rangle\right\}. \tag{7.132}$$

上で与えた OPE の公式(7.130)より，ツイストされたエネルギー・運動量テンソル $\widetilde{T}(z)$ は，Q-exact(BRST-trivial)であることがわかる；

$$\widetilde{T}(w) = \{Q,\, G^-(w)\} = \oint_w dz\, G^+(z)G^-(w).$$

ここで，$G^-(z)$ は同じくツイストによって共形ウェイト2のフェルミオニックな場となっている．以上より，物理的ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{TFT}}$ 上においては，$\widetilde{T}(w)$ は自明に作用し，期待通り位相的場の理論を与えていることがわかる．

それでは，物理的ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{TFT}}$ はもとの理論では何に対応しているだろうか？ まずツイストされた $\mathcal{N}=2$ の代数(7.129)，(7.130)を見るとわかるように，すべての超共形代数に属する演算子は，Q 不変でないか，Q-

exact であるかのどちらかであるから，$\mathcal{H}_{\mathrm{TFT}}$ に属する状態はプライマリー状態のみと考えて差し支えない．そして，Q はツイストする前の理論では $G^{+}_{-1/2}$ であったことを思い出すと，Q 不変(Q-closed)な状態とは，カイラル・プライマリー状態に他ならない．すなわち，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{TFT}} \cong \{\text{カイラル・プライマリー状態}\}, \tag{7.133}$$

が成り立つ．このようにトポロジカル・ツイストされた $\mathcal{N}=2$ の超共形場理論とは，ヒルベルト空間をカイラル・プライマリー状態に制限した理論に他ならない．多くの興味ある例においては，$\mathcal{H}_{\mathrm{TFT}}$ は有限次元となる．既に述べたようにカイラル・プライマリー場は演算子積が特異性なしに定義されており，全体でカイラル・リングを生成するので，このようなヒルベルト空間の制限は無矛盾である．

コメント

ミラー対称性　$\mathcal{N}=2$ SCA においては，$G^{+}(z)$ と $G^{-}(z)$ の役割は完全に対称であるから，反対に

$$Q' \equiv \oint G^{-}(z)dz,$$

を BRST 電荷とするトポロジカル・ツイストを考えてもよい．これは，ツイストされたエネルギー・運動量テンソルを，

$$\widetilde{T}'(z) = T(z) - \frac{1}{2}\partial J(z)$$

と選ぶことに相当し，$\widetilde{T}'$ で測った共形ウェイトは，$G^{+}(z)$ が 2，$G^{-}(z)$ が 1 となる．そして Q' のコホモロジーとして定義される物理的ヒルベルト空間は反プライマリー状態となる．ここで考えているものを上と区別して，「反ツイスト」と呼ぶことにしよう．もちろんツイストされた理論と反ツイストされた理論は，「荷電共役変換」；

$$T \to T, \quad J \to -J, \quad G^{\pm} \to G^{\mp}$$

を通じて同型である．さらに正則部分と反正則部分でツイストを独立に選ぶこともできるので，本質的に次の 2 通りのトポロジカル・ツイストが可能である；

A ツイスト　正則部分と反正則部分で相対的に逆の符号のツイストを選ぶ．

B ツイスト　正則部分と反正則部分で同じ符号のツイストを選ぶ．

これらはやはり，片側にのみ作用する荷電共役変換で移り合う同型な理論である．A ツ

イストとBツイストの間の同等性を一般に**ミラー対称性**と呼ぶ．一見当たり前のことを述べているようだが，そこから得られる帰結は非自明かつ大変有用なものである．超弦理論においては，ミラー対称性はタイプIIAストリングとタイプIIBストリングの間のT双対性*11の自然な拡張であり，カラビ・ヤウコンパクト化の精密な解析や，低エネルギー有効理論として現れる超対称ゲージ理論の非摂動論的解析において威力を発揮する．さらに，トポロジカル・ツイストした2次元の非線形シグマ模型(**トポロジカル・シグマ模型**)を通じて，豊富な数学的知見を与えることが知られている．ミラー対称性についてもっと詳しく勉強したい読者は，文献[80]などを参照されたい．

7.4 $\mathcal{N}=4$ 超共形場理論

$\mathcal{N}=4$ 超共形場理論について簡単に解説するとともに，最近の興味深い進展について概要を述べよう．

7.4.1 $\mathcal{N}=4$ 超共形代数

基本となる $\mathcal{N}=4$ の超共形代数($\mathcal{N}=4$ SCA)は，ビラソロ代数 $\{L_m\}$ に加え，4重項をなすスーパー・カレント $\{G_r^a,\ \bar{G}_r^a\}$ と $\widehat{SU}(2)$ カレント代数を含み，次の(反)交換関係によって定義される(σ^i はパウリ行列)；

$$
\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}+\frac{k}{2}(m^3-m)\delta_{m+n,0},\\
&[J_m^i, J_n^j] = i\epsilon^{ijk}J_{m+n}^k+\frac{k}{2}m\delta_{m+n,0}\delta_{ij},\\
&\{G_r^a, \bar{G}_s^b\} = 2\delta_{ab}L_{r+s}-2(r-s)\sigma_{ab}^i J_{r+s}^i+2k\left(r^2-\frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0},\\
&\{G_r^a, G_s^b\} = \{\bar{G}_r^a, \bar{G}_s^b\} = 0,\\
&[L_m, J_n^i] = -nJ_{m+n}^i,
\end{aligned}
$$

*11 タイプIIAストリングとタイプIIBストリングのカラビ・ヤウコンパクト化などにおいては，正則部分と反正則部分の $\mathcal{N}=2$ の $U(1)$ 電荷の符号が時空のフェルミオンのカイラリティを与える．したがって，ミラー対称性の変換は S^1 コンパクト化の際のT双対性と同様に，タイプIIAとタイプIIBを入れ換える変換として働く．また，「Aツイスト」，「Bツイスト」という用語は，超弦理論の「タイプIIA」，「タイプIIB」が語源となっている．

$$[L_m, G^a_r] = \left(\frac{m}{2}-r\right) G^a_{m+r}, \quad [L_m, \bar{G}^a_r] = \left(\frac{m}{2}-r\right) \bar{G}^a_{m+r},$$
$$[J^i_m, G^a_r] = -\frac{1}{2}\sigma^i_{ab} G^b_{m+r}, \quad [J^i_m, \bar{G}^a_r] = \frac{1}{2}\sigma^{i\,*}_{ab} \bar{G}^b_{m+r}. \tag{7.134}$$

R 対称性は,

$$SO(4) \cong SU(2)\times SU(2),$$

である．ここで 2 つの $SU(2)$ R 対称性のうち，**ひとつだけが「アフィン化」されており**，4 つのスーパーカレントは，このアフィン $\widehat{SU}(2)$ 対称性に対して 2 つの 2 重項 G^a，$\bar{G}^a\,(a=1,2)$ に分解される．残りの大域的な $SU(2)$ 対称性は，$\mathcal{N}=4$ の代数に対し外部自己同型として作用し，2 つの 2 重項 G^a，$\bar{G}^a$ の「混合」を与える．代数(7.134)がただひとつのパラメータ k を含んでいることに注意しよう．このパラメータは $\widehat{SU}(2)$ 部分代数 $\{J^i\}$ のレベルと同定され，表現のユニタリ性を要請すると，正の整数値でなければならない．また，ビラソロ部分代数の中心電荷は，

$$c = 6k \tag{7.135}$$

である．$\mathcal{N}\leq 2$ のケースと同様，これらのパラメータの制限は代数が(超)ヤコビ律を満たすための必要条件である．

7.4.2 ユニタリ表現，指標公式

$\mathcal{N}=2$ のケース同様，超共形代数(7.134)のユニタリ既約表現は真空(最高ウェイト状態)の共形ウェイト及び R 対称性の表現を与えることで指定される．$\mathcal{N}=2$ の場合 $U(1)$ カレント J に対する電荷 Q が重要であったが，$\mathcal{N}=4$ の場合は $\widehat{SU}(2)$ カレント代数のアイソスピンが同様の役割を果たす．以下にユニタリ既約表現の分類を与えよう [87]；

非退化表現(有質量表現)

非退化表現は，$\mathcal{N}=2$ のケースのカイラルでないプライマリー状態に対応し，真空の共形ウェイト h，アイソスピン ℓ は次のスペクトルを持つ；

$$\begin{aligned} &h > \ell, \quad \ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots, \frac{k-1}{2} \qquad (\text{NS セクター}), \\ &h > \frac{k}{4}, \quad \ell = \frac{1}{2}, 1, \cdots, \frac{k}{2} \qquad (\text{R セクター}). \end{aligned} \tag{7.136}$$

k=1 (c=6) の $\mathcal{N}$=4 超共形場理論は，超弦理論の $K3$ コンパクト化に対応しており，この表現は 4 次元時空での有質量物質場を与える．

退化表現(零質量表現)

退化表現は，$\mathcal{N}$=2 のケースのカイラル・プライマリー状態(またはラモン真空)に対応し，真空の共形ウェイト h，アイソスピン ℓ は次のスペクトルを持つ；

$$\begin{aligned} &h = \ell, \quad \ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots, \frac{k}{2} \qquad (\text{NS セクター}), \\ &h = \frac{k}{4}, \quad \ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots, \frac{k}{2} \qquad (\text{R セクター}). \end{aligned} \tag{7.137}$$

超弦理論の $K3$ コンパクト化では，これは零質量物質場または重力子を与える表現である．

これらのユニタリ表現の指標公式は文献 [87] に与えられている．本書では超弦理論の $K3$ コンパクト化に応用される k=1(c=6)の場合に限って解説することにしよう．以下，話をわかりやすくするため，NS セクターを主に考える．R セクターの指標を得るには，$\mathcal{N}$=2 の場合同様，$\eta=\dfrac{1}{2}$ のスペクトラル・フローを利用すればよい．

まず非退化表現であるが，k=1 ではアイソスピンは ℓ=0 に限られ，ユニタリ表現は真空の共形ウェイト h (>0) を定めれば決まる．求める指標公式は単純であり，

$$\mathrm{Ch}^{(\mathrm{NS})}(h;\tau,z) = q^{h-1/8}\,\frac{\theta_3(\tau,z)^2}{\eta(\tau)^3}, \tag{7.138}$$

と与えられる．

続いて退化表現は，アイソスピンが $\ell=0, \dfrac{1}{2}$ の 2 種類が存在し，それぞれの指標公式は，

$$\mathrm{Ch}_0^{(\mathrm{NS})}(\ell=0;\tau,z) = q^{-1/8}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{(1-q)q^{\frac{1}{2}m^2+m-\frac{1}{2}}y^{m+1}}{(1+yq^{m+1/2})(1+yq^{m-1/2})}\,\frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}$$

$$\equiv q^{-1/8}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{yq^{m-1/2}-1}{1+yq^{m-1/2}}\,q^{\frac{m^2}{2}}y^m\,\frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}, \quad (7.139)$$

$$\mathrm{Ch}_0^{(\mathrm{NS})}(\ell=1/2;\tau,z) = q^{-1/8}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{q^{\frac{m^2}{2}}y^m}{1+yq^{m-1/2}}\,\frac{\theta_3(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}, \quad (7.140)$$

と与えられる．

$\mathcal{N}$=4 SCA は $\mathcal{N}$=2 SCA を部分代数として含むので，これらの指標は $\mathcal{N}$=2 の既約表現の指標で展開されるはずである．この既約分解は正確に整数スペクトラル・フローによる足し上げと解釈することができる [88]．すなわち，指標公式(7.138)，(7.139)，(7.140)は次のように書き換えられる；

$$\mathrm{Ch}^{(\mathrm{NS})}(h;\tau,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2}y^{2m}\,\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}(h,Q=0;\tau,z+m\tau), \quad (7.141)$$

$$\mathrm{Ch}_0^{(\mathrm{NS})}(\ell=0;\tau,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2}y^{2m}\,\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},0}(\tau,z+m\tau) \equiv \sum_{m\in\mathbb{Z}}\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},m}(\tau,z), \quad (7.142)$$

$$\mathrm{Ch}_0^{(\mathrm{NS})}(\ell=1/2;\tau,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2}y^{2m}\,\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},1/2}(\tau,z+m\tau) \equiv \sum_{m\in\mathbb{Z}}\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},m+1/2}(\tau,z). \quad (7.143)$$

ここで，$\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}(h,Q;\tau,z)$，$\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{g},m}(\tau,z)$，$\mathrm{ch}^{(\mathrm{NS})}_{\mathbf{d},m+1/2}(\tau,z)$ は，$\hat{c}$=2(c=6)の場合の $\mathcal{N}$=2 SCA の既約表現の指標であり，(7.57)，(7.61)，(7.65)において与えられている．この事実は以下のように解釈される．$\hat{c}$=2 の場合，スペクトラル・フローを生成する演算子 $U^{\pm 1}$ がスピン 1 のカレントとなり，$\mathcal{N}$=2 SCA の $U(1)$ カレント $J(z)$ とともに，レベル 1 のアフィン $\widehat{SU}(2)$ を生成する；

$$\{J\equiv 2J^3,\ U^{\pm 1}\equiv J^{\pm}\} \cong \widehat{SU}(2)_1.$$

さらに $\mathcal{N}$=2 の 2 つのスーパー・カレント $G^{\pm}(z)$ を $U^{\pm 1}$ で変換することにより，計 4 つのスーパー・カレントが得られ，全体で $\mathcal{N}$=4 SCA (7.134)を与えるのである．

ところで，容易に確かめられるように

$$\mathrm{Ch}^{(\mathrm{NS})}(h;\tau,z)=\mathrm{Ch}^{(\mathrm{NS})}(h;\tau,-z),\quad \mathrm{Ch}_0^{(\mathrm{NS})}(\ell;\tau,z)=\mathrm{Ch}_0^{(\mathrm{NS})}(\ell;\tau,-z), \tag{7.144}$$

が成り立ち，これはレベル 1 の $\mathcal{N}=4$ SCA の表現が荷電共役不変であることを意味している．より非自明な指標の恒等式として，分解公式(7.142)，(7.143)と前に述べた $\mathcal{N}=2$ の指標の恒等式(7.63)を用いて次式が得られる；

$$\mathrm{Ch}^{(\mathrm{NS})}(h;\tau,z)=q^h\left(\mathrm{Ch}_0^{(\mathrm{NS})}(\ell=0;\tau,z)+2\mathrm{Ch}_0^{(\mathrm{NS})}(\ell=1/2;\tau,z)\right). \tag{7.145}$$

さて，これらの $\mathcal{N}=4$ の指標のモジュラー変換公式を述べておこう．特に退化表現の指標(7.139)，(7.140)は興味深いモジュラー変換性を示す [87]．モジュラー変換公式を書き下すために便宜的に次の記号を導入しよう；

$$\chi^{(\mathrm{NS})}(p;\tau,z)\equiv \mathrm{Ch}^{(\mathrm{NS})}\left(h=\frac{p^2}{2}+\frac{1}{8};\tau,z\right)\equiv q^{\frac{p^2}{2}}\frac{\theta_3(\tau,z)^2}{\eta(\tau)^3},$$

$$\chi_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{NS})}(\tau,z)\equiv \mathrm{Ch}_0^{(\mathrm{NS})}(\ell=0;\tau,z),\quad \chi_{\mathrm{M}}^{(\mathrm{NS})}(\tau,z)\equiv \mathrm{Ch}_0^{(\mathrm{NS})}(\ell=1/2;\tau,z). \tag{7.146}$$

また，他のスピン構造の指標については，$\frac{1}{2}$ スペクトラル・フローを用いて，以下のようになる；

$$\chi_*^{(\widetilde{\mathrm{NS}})}(*;\tau,z)\equiv\chi_*^{(\mathrm{NS})}(*;\tau,z+\frac{1}{2}),\quad \chi_*^{(\mathrm{R})}(*;\tau,z)\equiv q^{\frac{1}{4}}y\,\chi_*^{(\mathrm{NS})}(*;\tau,z+\frac{\tau}{2}),$$
$$\chi_*^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(*;\tau,z)\equiv q^{\frac{1}{4}}y\,\chi_*^{(\mathrm{NS})}(*;\tau,z+\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2}). \tag{7.147}$$

以上の準備のもとでモジュラー変換公式は次のように書かれる；

$$\chi^{(\sigma)}(p;\tau+1,z)=e^{2\pi\left(\frac{p^2}{2}-\frac{1}{8}+\frac{\epsilon_\sigma}{4}\right)}\chi^{(T\cdot\sigma)}(p;\tau,z),$$
$$\chi_{\mathrm{G}}^{(\sigma)}(\tau+1,z)=e^{2\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{\epsilon_\sigma}{4}\right)}\chi_{\mathrm{G}}^{(T\cdot\sigma)}(\tau,z),$$
$$\chi_{\mathrm{M}}^{(\sigma)}(\tau+1,z)=e^{2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon_\sigma}{4}\right)}\chi_{\mathrm{M}}^{(T\cdot\sigma)}(\tau,z). \tag{7.148}$$

$$\chi^{(\sigma)}\left(p;-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right)=\kappa_\sigma e^{i\pi\frac{2z^2}{\tau}}\,2\int_0^\infty dp'\,\cos(2\pi pp')\,\chi^{(S\cdot\sigma)}\left(p';\tau,z\right),$$
$$\chi_{\mathrm{G}}^{(\sigma)}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right)=\kappa_\sigma e^{i\pi\frac{2z^2}{\tau}}\left\{2\chi_{\mathrm{M}}^{(S\cdot\sigma)}(\tau,z)+2\int_0^\infty dp'\,\frac{\sinh^2\pi p'}{\cosh\pi p'}\,\chi^{(S\cdot\sigma)}(p';\tau,z)\right\},$$
$$\chi_{\mathrm{M}}^{(\sigma)}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right)=\kappa_\sigma e^{i\pi\frac{2z^2}{\tau}}\left\{-\chi_{\mathrm{M}}^{(S\cdot\sigma)}(\tau,z)+\int_0^\infty dp'\,\frac{1}{\cosh(\pi p')}\,\chi^{(S\cdot\sigma)}(p';\tau,z)\right\}. \tag{7.149}$$

ここで，スピン構造に関し再び記号(7.25)を用い，さらに

$$\epsilon_\sigma\equiv\begin{cases}0 & (\sigma=\mathrm{NS},\widetilde{\mathrm{NS}}),\\ 1 & (\sigma=\mathrm{R},\widetilde{\mathrm{R}}),\end{cases}\qquad \kappa_\sigma\equiv\begin{cases}1 & (\sigma=\mathrm{NS},\widetilde{\mathrm{NS}},\mathrm{R}),\\ -1 & (\sigma=\widetilde{\mathrm{R}}),\end{cases} \tag{7.150}$$

とおいた．

7.4.3 モック・モジュラー形式とモジュラー完備化

読者は退化表現の指標 $\chi_{\mathrm{G}}^{(\sigma)}(\tau,z)$, $\chi_{\mathrm{M}}^{(\sigma)}(\tau,z)$ のモジュラー S 変換が，本書でこれまで登場してきた公式と大きく違った特徴を持つことに気付かれるであろう．まず，S 変換の右辺には退化表現の離散的な項に加え，非退化表現の連続スペクトルが登場している．さらに，右辺に現れる退化表現には NS 真空に相当するもの(重力子表現)が現れていない．こうした「アノマリー的」なモジュラー変換性は，$\hat{c}>1$ の $\mathcal{N}\geq 2$ の SCA の(拡大された)指標に見られる普遍的な現象であり [87, 88, 89, 90, 91]，数学においては，**モック・モジュラー形式**(**モック・テータ関数**)[92] と呼ばれる新しい数学的概念と密接な関係がある．

おもしろいことに，上で議論した退化表現の指標に**非正則**な補正項を加えることによって，モジュラー変換のアノマリー項((7.149)の右辺に現れる非退化表現の積分項)を消すことができる(**モジュラー完備化**)．たとえば，スピン構造がモジュラー変換で保たれる $\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターを考えると，指標 $\mathrm{Ch}_0^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\ell=0;\tau,z)\left(\equiv-\chi_{\mathrm{M}}^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\tau,z)\right)$ はあらわには，

$$\mathrm{Ch}_0^{(\tilde{\mathrm{R}})}(\ell=0;\tau,z) = \frac{\theta_1(\tau,z)}{i\eta(\tau)^3} \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m \frac{y^{m+\frac{1}{2}} q^{\frac{m(m+1)}{2}}}{1-yq^m}, \tag{7.151}$$

と書かれ，この右辺の関数は，本質的に「アッペル・ラーク和」(Appell-Lerch sum)と呼ばれるモック・モジュラー形式となっている．文献 [92] に与えられている公式を利用すると，そのモジュラー完備化は，次のように定義される [93]；

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Ch}}_0^{(\tilde{\mathrm{R}})}(\ell=0;\tau,z) \equiv{}& \mathrm{Ch}_0^{(\tilde{\mathrm{R}})}(\ell=0;\tau,z) - \frac{1}{2}\frac{\theta_1(\tau,z)^2}{\eta(\tau)^3} \\ &\times \sum_{\nu\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} (-1)^{\nu-\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}\nu^2} \left\{\mathrm{sgn}(\nu) - 2\int_0^{\sqrt{2\tau_2}\nu} e^{-\pi t^2} dt\right\}.\end{aligned} \tag{7.152}$$

ここで，右辺の第 2 項が文献 [92] の公式に基づく非正則な補正項である($\tau_2 \equiv \mathrm{Im}\,\tau$ が現れていることに注意されたい)．(7.152)の右辺は，より簡単な表式に書き換えが可能であり次式が証明できる [94]；

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Ch}}_0^{(\tilde{\mathrm{R}})}(\ell=0;\tau,z) &= \frac{\theta_1(\tau,z)}{2\pi\eta(\tau)^3} \sum_{\lambda\equiv m\tau+n\in\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}} (-1)^{m+n+mn} \frac{e^{-\frac{\pi}{2\tau_2}\left\{z^2+2\bar{\lambda}z+|\lambda|^2\right\}}}{z+\lambda} \\ &= \frac{\theta_1(\tau,z)^2}{\pi\eta(\tau)^3\theta_1(\tau,2z)} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}} \frac{e^{-\frac{2\pi}{\tau_2}\left\{z^2+2\bar{\lambda}z+|\lambda|^2\right\}}}{z+\lambda}.\end{aligned} \tag{7.153}$$

これらの 2 重級数は，言わば「非正則なポアンカレ級数」であり，ガウス型因子のために絶対収束するから，容易にモジュラー S 変換性；

$$\widehat{\mathrm{Ch}}_0^{(\tilde{\mathrm{R}})}\left(\ell=0;-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right) = e^{i\pi\frac{2z^2}{\tau}}\,\widehat{\mathrm{Ch}}_0^{(\tilde{\mathrm{R}})}(\ell=0;\tau,z), \tag{7.154}$$

が確認できる．

モジュラー完備化は，単なる数学的なトリックに留まらず，非コンパクトな超対称ゲージ化 WZW 模型の楕円種数や分配関数を経路積分を用いて解析することによって自然に得ることができるという点を強調したい [95, 96, 94]．ここで非正則な補正項の出現はある種の「正則アノマリー」の存在を示唆しており，興味深い現象である．

7.5　ムーンシャイン現象

本章の最後に，近年新しい発見があり，数学者と物理学者を巻き込み急速な研究の広がりを見せている「ムーンシャイン現象」について簡単に述べよう．

(1)　モンスター群のムーンシャイン

まずは雛形となったモンスター群のムーンシャイン現象(monsterous moonshine)について概説しよう．「モンスター群」とは，散在型の有限群のうちで最も大きな位数を持つ群**モンスター**(Monster)のことである．この巨大な群の定義や発見の経緯等については，[12] を参照されたい．5.5.2 項で導入した j 不変量(5.188)を思い出して欲しい(または(A.49)，(A.52)を参照)．そこで導入した定数項を除いた関数 $J(\tau)$ (5.189)を再び書くと；

$$J(\tau) \equiv j(\tau) - 744 = \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + \cdots. \tag{7.155}$$

数学者のマッカイ(McKay)は，1978 年にこの級数の展開係数に特別な意味があることに気がついた．すなわち

$$196884 = 1 + 196883, \quad 21493760 = 1 + 196883 + 21296876, \tag{7.156}$$

と分解してみると 196883 はモンスターの一番小さな既約表現の次元であり，2129876 は 2 番目に小さな既約表現の次元になっている．さらに，一般に J 関数(7.155)の展開；

$$J(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n, \tag{7.157}$$

の全ての係数 $a(n)$ $(n \geq 1)$ が，モンスターの既約表現の次元の和になっていることが証明できる．すなわち，

$$a(n) = \sum_i c_{n,i} \dim R_i \tag{7.158}$$

ここで R_i はモンスターの既約表現，係数 $c_{n,i}$ は正の整数である．この関係が「ムーンシャイン現象」と呼ばれている．

保型形式と有限群は，通常は互いに全く交流のない数学分野であるため，その間に成り立つ不思議な関係は大きな関心を巻き起こした．マッカイの発見から 10 数年かかって，フレンケル(Frenkel)，レポウスキー(Lepowsky)，マーマン(Meurman)，ボーチャーズ(Borcherds)らによってムーンシャイン現象の数学的な証明が与えられた．共形場理論の見地からは，5.5.2 項で解説したリーチ格子によるモジュラー不変分配関数(5.196)が $J(\tau)$ に等しく，この共形場の模型にモンスターが対称性の群として働くということを意味している．この研究を契機として「頂点作用素代数」(vertex operator algebra：VOA)の概念が整備され，ひとつの数学分野を形成するに至っている(詳細は [11,12] を参照)．

(2) マシュー群(M_{24})のムーンシャイン

次に，最近発見された**マシュー群** M_{24} に対する新しいムーンシャイン現象(Mathieu moonshine)を紹介しよう [97]．マシュー群 M_{24} は 24 個の元の入れ替えから作られる対称群 S_{24} の部分群であり，いろいろな美しい性質を持つことが知られている．特に，エラー訂正コード(Goley code)と密接な関係がある．

曲がった多様体 M 上にコンパクト化された弦理論を考えると，その振幅は多様体 M に関するさまざまな情報を含んでいることが期待される．特に 7.3.2 項で議論した楕円種数は，M が持つ位相不変量の母関数の役割を果たすため興味がある．

M として $K3$ 曲面を考えよう．その楕円種数は(7.120)で与えられていた；

$$Z_{K3}(\tau,z)=8\left[\left(\frac{\theta_3(\tau,z)}{\theta_3(\tau)}\right)^2+\left(\frac{\theta_4(\tau,z)}{\theta_4(\tau)}\right)^2+\left(\frac{\theta_2(\tau,z)}{\theta_2(\tau)}\right)^2\right].$$

楕円種数は全て正則部分のヒルベルト空間 $\mathcal{H}_L$ に属する状態から作られているので，$N=4$ 超共形代数の表現の指標公式の和に分解できるはずである．指標の恒等式(7.145)を $\widetilde{\mathrm{R}}$ セクターに読み替えたものを利用すると，重力子表現($\widetilde{\mathrm{R}}$ では $\ell=\dfrac{1}{2}$)の指標は消去することができ，最終的に次の形の展開式が得られる；

$$Z_{K3}(\tau,z) = 24\mathrm{Ch}_0^{(\tilde{\mathrm{R}})}(\ell=0;\tau,z)+2\sum_{n=0}^{\infty} A(n)q^{n-\frac{1}{8}}\frac{\theta_1(\tau,z)^2}{\eta(\tau)^3}. \quad (7.159)$$

ここで右辺第2項が有質量表現の寄与を表している．既に述べたように，右辺第1項の零質量表現の指標はモック・モジュラー形式であってアノマリー的なモジュラー変換性を示す．一方，左辺は性質のよい通常のヤコビ形式であるから，右辺第2項の無限級数も同様のアノマリー的なモジュラー変換性を持ち，これもモック・モジュラー形式であることになる．

さて，この「第2の」モック・モジュラー形式の展開係数 $A(n)$ をあらわに書き下してみると，大変おもしろい性質があることがわかる [97]．すなわち，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$A(n)$	45	231	770	2277	5796	13915	30843	65550	$\cdots$

となるが，群論のデータと比較すると，ここにマシュー群 M_{24} の既約表現の次元が現れている事実に気がつく．参考までに M_{24} の既約表現の次元を並べると，

$$\begin{aligned}&45\ 231\ 770\ 990\ 1771\ 2024\ 2277\ 3312\ 3520\ 5313\ 5544\\&5796\ 10395\cdots\end{aligned} \quad (7.160)$$

となり，$A(1)$ から $A(5)$ が確かに現れている．さらに，

$$A(6) = 13915 = 3520+10395,$$

$$A(7) = 30843 = 10395+5796+5544+5313+2024+1771,$$

等が成り立つこともチェックできる．

これらの事実により，展開係数 $A(n)$ に対し，

$$A(n) = \sum_i C_{n,i}\dim R_i, \quad (7.161)$$

が成立すると予想される．ここで $\dim R_i$ は M_{24} の規約表現 R_i の次元，$C_{n,i}$ は正の整数である．関係(7.161)をマシュー・ムーンシャイン(Mathieu moonshine)と呼ぶ．

マシュー・ムーンシャイン(7.161)はマッカイ・トンプソン級数(McKay-

Thompson series)の方法(「ねじった」楕円種数の方法)を用いて n の値が数百まで計算機で確かめられ [98]，その後，数学的帰納法を用いて全ての n について成り立つことが証明された [99].

マシュー・ムーンシャインの他にムーンシャイン現象が存在するかどうかは興味ある問題であるが，現在**ウンブラル・ムーンシャイン**(umbral moonshine)*12と呼ばれる系列が知られている [100]. $K3$ 曲面の代わりに次元のより高い多様体上の弦理論を考えたような構成であるが，ヒルベルト空間に恒等演算子に相当する真空状態が存在しないなど，解釈に難しい問題が残る．マシュー・ムーンシャインもその証明は存在するが，明快な物理的，数学的な解釈に欠けており，今後の研究が期待される．

*12 「umbra」とは「本影」のことであり，影の最も暗い部分を指す．月が地球の本影に隠れると皆既月食となる．

付録　公式集

ここでは本書で繰り返し用いている公式とその証明の概略に関してまとめよう.

以下, $q \equiv e^{2\pi i\tau}$, $y \equiv e^{2\pi i z}$ とし, $\tau_2 \equiv \mathrm{Im}\ \tau > 0$ を仮定する.

(1)　ポアッソンの和公式(Poisson resummation)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nL) = \frac{1}{L}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m/L). \tag{A.1}$$

ここで $f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ において可積分な関数, $\hat{f}(k)$ は $f(x)$ のフーリエ変換:

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx$$

であり, $L>0$ とする. 証明は, 周期 L の周期関数 $F(x) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nL)$ のフーリエ級数展開を考えればよい.

ポアッソンの和公式(A.1)とガウス積分公式により次の等式が導かれ, モジュラー変換の計算などに有用な公式である(Re $a>0$).

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi a m^2 + 2\pi i b m} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{a}(n-b)^2} \tag{A.2}$$

(A.1)は容易に高次元に拡張される. $f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N$ における可積分関数, また $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{R}^N$ における**正定値とは限らない**内積とする. f のフーリエ変換を

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\boldsymbol{x}) e^{-2\pi i\langle \boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle} d^N\boldsymbol{x}$$

によって定義する. そして, $\Lambda \equiv \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{Z}\boldsymbol{a}_i$ を $\mathbb{R}^N$ における格子, Λ の双対格子 Λ^* を

$$\Lambda^* \equiv \{\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^N\ :\ \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{Z}\ ,\ {}^\forall \boldsymbol{b}\in\Lambda\}$$

と定義するとき，高次元のポアッソン和公式として，

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda} f(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Lambda)} \sum_{\boldsymbol{m}\in\Lambda^*} \hat{f}(\boldsymbol{m}), \tag{A.3}$$

が成立する．ここで $\mathrm{vol}(\Lambda)$ は，格子 Λ の単位胞：$\sum_{i=1}^{N}[0,1)\boldsymbol{a}_i$ の体積であり，$\{\boldsymbol{f}_i\}$ $(i=1,\cdots,N)$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対する正規直交基底(すなわち，$\langle\boldsymbol{f}_i,\boldsymbol{f}_j\rangle=\pm\delta_{ij}$)とするとき，

$$\bigwedge_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_i = v \bigwedge_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i, \quad \mathrm{vol}(\Lambda) = |v| \tag{A.4}$$

と定義される[*1]．

(A.2)の N 次元への拡張も容易である(A_{ij} を N 次元の正定値実対称行列とする．また，添え字に i,j について和の規則を用いている)；

$$\sum_{m_i\in\mathbb{Z}} e^{-\pi m_i A_{ij} m_j + 2\pi i b_i m_i} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \sum_{n_i\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n_i-b_i)(A^{-1})_{ij}(n_j-b_j)}. \tag{A.5}$$

(2)　テータ関数

本書では次のように(**古典**)**テータ関数**を定義する($m,k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ とする)．

$$\Theta_{m,k}(\tau,z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{k(n+\frac{m}{2k})^2} y^{k(n+\frac{m}{2k})}, \tag{A.6}$$

$$\widetilde{\Theta}_{m,k}(\tau,z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{k(n+\frac{m}{2k})^2} y^{k(n+\frac{m}{2k})}. \tag{A.7}$$

また省略記号 $\Theta_{m,k}(\tau)\equiv\Theta_{m,k}(\tau,0)$，$\widetilde{\Theta}_{m,k}(\tau)\equiv\widetilde{\Theta}_{m,k}(\tau,0)$ を用いることにする．本書では使わないが，

$$\Theta_{m,k}(\tau,z,u) \equiv e^{2\pi iku}\Theta_{m,k}(\tau,z)$$

という記号もよく用いられる．

ヤコビ(Jacobi)のテータ関数は次のように定義する[*2]；

---

*1　このように定義される体積は，計量 $\langle\ ,\ \rangle$ が正定値でなくとも well-defined であることに注意しよう．

*2　文献によって符号などの慣習が微妙に異なることがあるので注意されたい．

$$\theta_1(\tau,z)\equiv i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}y^{n-\frac{1}{2}}\equiv -i\left(\Theta_{1,2}(\tau,z)-\Theta_{3,2}(\tau,z)\right),$$

$$\theta_2(\tau,z)\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}y^{n-\frac{1}{2}}\equiv \Theta_{1,2}(\tau,z)+\Theta_{3,2}(\tau,z),$$

$$\theta_3(\tau,z)\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}}y^{n}\equiv \Theta_{0,2}(\tau,z)+\Theta_{2,2}(\tau,z),$$

$$\theta_4(\tau,z)\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n^2}{2}}y^{n}\equiv \Theta_{0,2}(\tau,z)-\Theta_{2,2}(\tau,z). \tag{A.8}$$

混乱の恐れのないときは，再び省略記号 $\theta_i\equiv\theta_i(\tau)\equiv\theta_i(\tau,0)$ $(\theta_1\equiv0)$ を用いることとする．

次の等式は定義からただちに導かれ，テータ関数の基本的な性質である；

$$\Theta_{m+2k,k}(\tau,z)=\Theta_{m,k}(\tau,z)\ , \tag{A.9}$$

$$\widetilde{\Theta}_{m+2k,k}(\tau,z)=-\widetilde{\Theta}_{m,k}(\tau,z)\ , \tag{A.10}$$

$$\Theta_{m,k}(\tau,-z)=\Theta_{-m,k}(\tau,z)\ , \tag{A.11}$$

$$\widetilde{\Theta}_{m,k}(\tau,-z)=\widetilde{\Theta}_{-m,k}(\tau,z)\ , \tag{A.12}$$

$$\Theta_{m,k}(\tau,z+a\tau)=q^{-\frac{ka^2}{4}}y^{-\frac{ka}{2}}\Theta_{m+ka,k}(\tau,z)\ , \tag{A.13}$$

$$\widetilde{\Theta}_{m,k}(\tau,z+a\tau)=q^{-\frac{ka^2}{4}}y^{-\frac{ka}{2}}\widetilde{\Theta}_{m+ka,k}(\tau,z)\ , \tag{A.14}$$

$$\Theta_{m,k}(\tau,z+a)=\begin{cases} e^{i\pi ma}\Theta_{m,k}(\tau,z) & (ka\in\mathbb{Z})\ ,\\ e^{i\pi ma}\widetilde{\Theta}_{m,k}(\tau,z) & (ka\in\mathbb{Z}+\dfrac{1}{2})\ .\end{cases} \tag{A.15}$$

テータ関数のモジュラー変換公式は次で与えられる；

$$\Theta_{m,k}(\tau,z)|_T\equiv\Theta_{m,k}(\tau+1,z)=\begin{cases} e^{2\pi i\frac{m^2}{4k}}\Theta_{m,k} & (m\in\mathbb{Z}),\\ e^{2\pi i\frac{m^2}{4k}}\widetilde{\Theta}_{m,k} & (m\in\mathbb{Z}+\dfrac{1}{2}),\end{cases} \tag{A.16}$$

$$\Theta_{m,k}(\tau,z)|_S\equiv\Theta_{m,k}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right)=\sqrt{-i\tau}\,e^{2\pi ik\frac{z^2}{4\tau}}\sum_{m'\in\mathbb{Z}_{2k}}M^{(k)}_{mm'}\Theta_{m',k}(\tau,z),$$

$$M^{(k)}_{mm'}\equiv\frac{1}{\sqrt{2k}}e^{-2\pi i\frac{mm'}{2k}}. \tag{A.17}$$

あるいは，

$$\Theta_{m,k}(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau},u-\frac{z^2}{4\tau})=\sqrt{-i\tau}\sum_{m'\in\mathbb{Z}_{2k}}M^{(k)}_{mm'}\Theta_{m',k}(\tau,z,u). \tag{A.18}$$

(A.16)は自明であろう．(A.17)(または(A.18))はポアッソンの和公式(A.2)を使って初等的に証明できる．

テータ関数の積公式は，

$$\Theta_{m,k}(\tau,z)\Theta_{m',k'}(\tau,z') = \sum_{r\in\mathbb{Z}_{k+k'}} \Theta_{mk'-m'k+2kk'r,kk'(k+k')}(\tau,u)\Theta_{m+m'+2kr,k+k'}(\tau,v), \quad \text{(A.19)}$$

と書かれる．ここで，$u=\dfrac{z-z'}{k+k'}$, $v=\dfrac{kz+k'z'}{k+k'}$ とおいた．証明は初等的にできるが，少々煩雑なのでここでは省略する．[10] などを参照されたい．

ヤコビのテータ関数に関しても基本的な性質をまとめておこう；

$$\begin{aligned} \theta_1(\tau,-z) &= -\theta_1(\tau,z), \\ \theta_1(\tau,z+m\tau+n) &= (-1)^{m+n}q^{-\frac{m^2}{2}}y^{-m}\theta_1(\tau,z), \quad (m,n\in\mathbb{Z}), \\ \theta_1(\tau+1,z) &= e^{\frac{\pi i}{4}}\theta_1(\tau,z), \\ \theta_1(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) &= -i\sqrt{-i\tau}e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\theta_1(\tau,z), \end{aligned} \quad \text{(A.20)}$$

$$\begin{aligned} \theta_2(\tau,-z) &= \theta_2(\tau,z), \\ \theta_2(\tau,z+m\tau+n) &= (-1)^{n}q^{-\frac{m^2}{2}}y^{-m}\theta_2(\tau,z), \quad (m,n\in\mathbb{Z}), \\ \theta_2(\tau+1,z) &= e^{\frac{\pi i}{4}}\theta_2(\tau,z), \\ \theta_2(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) &= \sqrt{-i\tau}e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\theta_4(\tau,z), \end{aligned} \quad \text{(A.21)}$$

$$\begin{aligned} \theta_3(\tau,-z) &= \theta_3(\tau,z), \\ \theta_3(\tau,z+m\tau+n) &= q^{-\frac{m^2}{2}}y^{-m}\theta_3(\tau,z), \quad (m,n\in\mathbb{Z}), \\ \theta_3(\tau+1,z) &= \theta_4(\tau,z), \\ \theta_3(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}) &= \sqrt{-i\tau}e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\theta_3(\tau,z), \end{aligned} \quad \text{(A.22)}$$

$$\theta_4(\tau,-z) = \theta_4(\tau,z),$$

$$\theta_4(\tau, z+m\tau+n) = (-1)^m q^{-\frac{m^2}{2}} y^{-m}\theta_4(\tau, z), \quad (m,n\in\mathbb{Z}),$$
$$\theta_4(\tau+1, z) = \theta_3(\tau, z),$$
$$\theta_4(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}) = \sqrt{-i\tau}\, e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}}\theta_2(\tau, z). \tag{A.23}$$

さらにヤコビのテータ関数の相互の関係を与える等式として,

$$\theta_3(\tau, z+\frac{1}{2}) = \theta_4(\tau, z),$$
$$\theta_3(\tau, z+\frac{1}{2}\tau) = q^{-\frac{1}{8}} y^{-\frac{1}{2}}\theta_2(\tau, z),$$
$$\theta_3(\tau, z+\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2}) = iq^{-\frac{1}{8}} y^{-\frac{1}{2}}\theta_1(\tau, z), \tag{A.24}$$

を知っておくと便利である．これらはいずれも定義(A.8)から容易に示される．

特にヤコビのテータ関数が $z\to z+1$, $z\to z+\tau$ に対し「ほとんど2重周期性」を持つことに注目しよう(この性質を**擬2重周期性**(quasi-double periodicity)と言う)．これはテータ関数の基本的な特徴であり，このため楕円関数の構成要素として用いられる．

もう少し非自明な公式として，ヤコビのテータ関数の無限積表示の公式がある；

$$\theta_1(\tau, z) = 2\sin(\pi z) q^{\frac{1}{8}} \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-yq^m)(1-y^{-1}q^m),$$
$$\theta_2(\tau, z) = 2\cos(\pi z) q^{\frac{1}{8}} \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+yq^m)(1+y^{-1}q^m),$$
$$\theta_3(\tau, z) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+yq^{m-\frac{1}{2}})(1+y^{-1}q^{m-\frac{1}{2}}),$$
$$\theta_4(\tau, z) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-yq^{m-\frac{1}{2}})(1-y^{-1}q^{m-\frac{1}{2}}). \tag{A.25}$$

これらは重要な恒等式なので，本節の最後で証明の概略を述べることにしよう．

$\theta_i(\tau, z)$ は z の関数として正則であり，無限積表示(A.25)から次のように1位の零点を持つことがわかる(擬2重周期性により，領域 $[0,1)\tau+[0,1)$ のみを

調べればよい)；

	$\theta_1(\tau,z)$	$\theta_2(\tau,z)$	$\theta_3(\tau,z)$	$\theta_4(\tau,z)$
零点	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\tau+1}{2}$	$\frac{\tau}{2}$

ヤコビのテータ関数を含む恒等式は数多く存在するが，そのうち応用上重要なものをいくつか書いておくと，

$$\theta_2(2\tau)\,(\equiv \Theta_{1,1}(\tau)) = \sqrt{\frac{1}{2}\,\{\theta_3(\tau)^2-\theta_4(\tau)^2\}},$$

$$\theta_3(2\tau)\,(\equiv \Theta_{0,1}(\tau)) = \sqrt{\frac{1}{2}\,\{\theta_3(\tau)^2+\theta_4(\tau)^2\}},$$

$$\theta_4(2\tau)\left(\equiv \widetilde{\Theta}_{0,1}(\tau)\right) = \sqrt{\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)}, \tag{A.26}$$

(2 重化恒等式)

$$\theta_3(\tau,z)^4-\theta_4(\tau,z)^4-\theta_2(\tau,z)^4+\theta_1(\tau,z)^4 = 0. \tag{A.27}$$

(ヤコビ恒等式)

まず(A.26)のひとつ目と 2 つ目の恒等式はヤコビのテータ関数の定義(A.8)と積公式(A.19)を用いて簡単に示される．3 番目の恒等式を示すために，まず

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{1-q^{2n}} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^n}{(1+q^n)(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+q^n},$$

より，恒等式：

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)(1-q^{2n-1}) = 1 \tag{A.28}$$

が成立することに注意する．これと無限積表示(A.25)より，

$$\begin{aligned}\theta_4(2\tau) &= \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1-q^{2m-1})^2 = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+q^m)(1-q^{2m-1})^2\\ &= \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-q^{2m-1}) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+q^{m-\frac{1}{2}})(1-q^{m-\frac{1}{2}})\\ &= \sqrt{\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)}\end{aligned}$$

となる．

次に，やはり定義(A.8)と積公式(A.19)を用いて少し計算すると，

$$\theta_3(\tau,z)^4-\theta_4(\tau,z)^4 = \theta_2(\tau,z)^4-\theta_1(\tau,z)^4$$
$$= 4\Theta_{0,1}(\tau,0)\Theta_{0,1}(\tau,2z)\Theta_{1,1}(\tau,0)\Theta_{1,1}(\tau,2z)$$

が成り立つことがわかるので，ヤコビ恒等式(A.27)が従う．

特に(A.27)で $z=0$ とおくと，$\theta_1(\tau,0)=0$ なので，

$$\theta_3(\tau)^4-\theta_4(\tau)^4-\theta_2(\tau)^4 = 0 \tag{A.29}$$

が得られる．これは超弦理論の時空の超対称性に関連した重要な恒等式である．

(3)　デデキント(Dedekind)のエータ関数

エータ関数は次の無限積で定義する．

$$\eta(\tau) \equiv q^{\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m). \tag{A.30}$$

エータ関数とテータ関数との関係式としてよく知られているものを列挙すると，

$$2\pi\eta(\tau)^3 = \partial_z\theta_1(\tau,z)|_{z=0} \tag{A.31}$$

$$\eta(\tau) = \widetilde{\Theta}_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\tau) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{3}{2}\left(n-\frac{1}{6}\right)^2},$$

（オイラーのペンタゴン数恒等式）　(A.32)

$$2\eta(\tau)^3 = \theta_2(\tau)\theta_3(\tau)\theta_4(\tau). \quad \text{（オイラー恒等式）} \tag{A.33}$$

(A.31)は $\theta_1(\tau,z)$ の無限積表示(A.25)からただちに導かれる．$\theta_3(\tau,z)$ の無限積表示において，$q\to q^3$，$y\to -q^{-\frac{1}{2}}$ という置き換えをすると(A.32)が得られる．また(A.33)は恒等式(A.28)からただちに導かれる．

$\eta(\tau)$ のモジュラー変換公式は，

$$\eta(\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{12}}\eta(\tau), \tag{A.34}$$

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau) \tag{A.35}$$

である．(A.34)は自明であろう．また(A.35)は，たとえば恒等式(A.31)と $\theta_1(\tau,z)$ のモジュラー変換公式から簡単に示すことができる(あるいは，(A.32)とテータ関数のモジュラー変換公式(A.17)を用いてもよい)．$\sqrt{\tau_2}\,|\eta(\tau)|^2$ がモジュラー不変であることを覚えておくと便利である．

(4) ワイエルシュトラス(Weierstrass)の $\wp$ 関数

最も基本的な楕円関数である $\wp$ 関数は，(定数倍と定数のシフトを除き)原点に唯一の極を持つ一意的な 2 位の楕円関数であり，

$$\wp(z)\,(\equiv \wp(\tau,z)) = \frac{1}{z^2}+\sum_w{}' \left\{\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right\}, \tag{A.36}$$

と定義される．ここで，$\sum_w{}'$ は，$w\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau-\{0\}$ にわたる和を意味する．1 階導関数 $\wp'(z)$ はやはり原点に唯一の極を持つ一意的な 3 位の楕円関数であり，

$$\wp'(z) = -2\sum_w{}' \frac{1}{(z-w)^3}, \tag{A.37}$$

となる．$\wp(z)$ の重要な性質として，ワイエルシュトラスの微分方程式；

$$\begin{aligned}(\wp'(z))^2 &= 4\wp(z)^3-g_2\wp(z)-g_3\\ &\equiv 4(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)(\wp(z)-e_4),\end{aligned} \tag{A.38}$$

を満たす*3ことが容易に証明される．ここで，$g_2=g_2(\tau)$, $g_3=g_3(\tau)$ はアイゼンシュタイン級数(Eisenstein series)

$$g_2 \equiv 60\sum_w{}' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 \equiv 140\sum_w{}' \frac{1}{w^6}, \tag{A.39}$$

である．また(A.38)の 1 行目と 2 行目の等価性より，$e_2+e_3+e_4=0$ でなければならない．

定義式(A.36)より，$\wp$ 関数のモジュラー変換公式はただちに導かれ，

---

*3　よく知られているように，楕円積分

$$u(x) = \int_x^\infty \frac{dx'}{\sqrt{4x'^3-g_2x'-g_3}}$$

の逆関数 $x=\wp(u)$ が $\wp$ 関数の定義であると言ってもよい．なお，‘$\wp$’ は「ペー」と読む．

$$\wp\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2\wp(\tau, z)\ , \quad \forall\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}), \tag{A.40}$$

と書くことができる．

$\wp'(z)$ は奇関数であり，2 重周期性を持つことから，基本領域 $[0,1)\tau+[0,1)$ に 3 つの零点 $\frac{1}{2}$，$\frac{\tau}{2}$，$\frac{\tau+1}{2}$ を持つことがわかる；

$$\wp'(1/2) = \wp'(\tau/2) = \wp'((\tau+1)/2) = 0. \tag{A.41}$$

そこで，(A.38)における e_2, e_3, e_4 を，次のように同定しよう*4；

$$e_2 = \wp(1/2), \quad e_3 = \wp((\tau+1)/2), \quad e_4 = \wp(\tau/2). \tag{A.42}$$

さて，$\wp$ 関数とテータ関数の有用な関係式を述べるため，次の記号を導入しよう；

$$\vartheta(z) \equiv \frac{\theta_1(\tau,z)}{\partial_z\theta_1(\tau,0)} \equiv \frac{\theta_1(\tau,z)}{2\pi\eta(\tau)^3}, \quad f_i(z) \equiv \frac{\theta_i(\tau,z)}{\theta_i(\tau)}, \quad (i=3,4,2). \tag{A.43}$$

このとき，次の恒等式が成立する；

$$\wp(z)-e_i = \frac{f_i(z)^2}{\vartheta(z)^2}, \quad (i=3,4,2), \tag{A.44}$$

$$\wp'(z) = -\frac{\vartheta(2z)}{\vartheta(z)^4} = -2\frac{f_2(z)f_3(z)f_4(z)}{\vartheta(z)^3}. \tag{A.45}$$

(A.44)の証明は次のようにすればよい．まず，両辺が同じ 2 重周期性を持ち，同じ位数の零点と極を共有することに注目すれば，$f\equiv$左辺/右辺 は正則な楕円関数となるので z-依存性を持たないことがわかる．そして，$z=0$ の近傍でローラン展開すると，左辺，右辺ともに $\frac{1}{z^2}$ が最低次項となるので，$f(z)\equiv1$ でなければならない．全く同様にして(A.45)も証明される．

(A.44)と $e_2+e_3+e_4=0$ を組み合わせると，$\wp$ 関数をヤコビのテータ関数で

*4 'e_1, e_2, e_3' と書かれる方が多いが，ここではすぐ下で明らかになる理由によって，'e_2, e_3, e_4' と表記しておく．

表す公式が得られる；

$$\wp(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{\vartheta(z)^2}\left\{f_2(z)^2+f_3(z)^2+f_4(z)^2\right\}. \tag{A.46}$$

さらに次の恒等式も有用である；

$$\begin{aligned} f_3(z)^2-f_2(z)^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{\theta_4(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4\left(\frac{\theta_1(\tau,z)}{\eta(\tau)}\right)^2, \\ f_4(z)^2-f_2(z)^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{\theta_3(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4\left(\frac{\theta_1(\tau,z)}{\eta(\tau)}\right)^2, \\ f_4(z)^2-f_3(z)^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{\theta_2(\tau)}{\eta(\tau)}\right)^4\left(\frac{\theta_1(\tau,z)}{\eta(\tau)}\right)^2. \end{aligned} \tag{A.47}$$

(A.44)と(A.47)を組み合わせると，e_2, e_3, e_4 を直接ヤコビのテータ関数で書き表すことができる；

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{\pi^2}{3}\left(\theta_3^4(\tau)+\theta_4^4(\tau)\right), \quad e_3 = \frac{\pi^2}{3}\left(\theta_2^4(\tau)-\theta_4^4(\tau)\right), \\ e_4 &= -\frac{\pi^2}{3}\left(\theta_2^4(\tau)+\theta_3^4(\tau)\right). \end{aligned} \tag{A.48}$$

詳しく説明はしないが，これらは $\Gamma(2)$ に関するウェイト 2 のモジュラー形式である．また(A.48)は，拘束条件 $e_2+e_3+e_4=0$ と矛盾しないことに注意しよう．

有名な「j 不変量」は，

$$j(\tau) \equiv 1728\cdot\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2} = \frac{1}{q}+744+196884q+\cdots, \tag{A.49}$$

と定義されモジュラー不変である．実際，(A.38)の 1 行目と 2 行目を比較し，恒等式(A.48)，(A.29)などを用いると，

$$g_2 = -4\left(e_2e_3+e_3e_4+e_4e_2\right) = \frac{2}{3}\pi^4\left(\theta_3(\tau)^8+\theta_4(\tau)^8+\theta_2(\tau)^8\right), \tag{A.50}$$

となる．さらに，3 次方程式 $4y^3-g_2y-g_3=0$ の判別式を考えることにより，

$$\begin{aligned} g_2^3-27g_3^2 &= 16(e_2-e_3)^2(e_3-e_4)^2(e_4-e_2)^2 \\ &= (2\pi)^{12}\eta(\tau)^{24}, \end{aligned} \tag{A.51}$$

が得られる．ここで，2 行目では再び恒等式(A.48), (A.29)，および(A.33)を用いた．以上より，j 不変量(A.49)はテータ関数を用いて，

$$j(\tau) = \frac{1}{8}\frac{1}{\eta(\tau)^{24}}\left\{\theta_3(\tau)^8+\theta_4(\tau)^8+\theta_2(\tau)^8\right\}^3, \tag{A.52}$$

と書き表すことができる．テータ関数とエータ関数のモジュラー変換性から，(A.52)がモジュラー不変であることは容易に確認できる．

最後に予告通り，ヤコビのテータ関数の無限積表示(A.25)の証明の概略を述べよう．まず関係式(A.24)があるので，$\theta_3(\tau,z)$ について証明すれば他はそれから簡単に導かれる．つまり証明すべき恒等式は，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} y^n = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+yq^{m-\frac{1}{2}})(1+y^{-1}q^{m-\frac{1}{2}}) \tag{A.53}$$

であり，「ヤコビの 3 重積恒等式」と呼ばれる．

この恒等式は次のように「物理的に」証明することができる．エネルギー準位 $\epsilon_0(n-\dfrac{1}{2})$ $(n\in\mathbb{Z})$を持つ「電子」の系を考えよう．例によって真空は負のエネルギーを持つ電子で詰まっているディラックの海であるとし，負のエネルギー準位の空孔を「陽電子」と解釈する．ハミルトニアン H とフェルミオン数演算子 N の原点はディラックの海に選ぶ．逆温度を β，化学ポテンシャルを μ として大分配関数 $Z(\beta,\mu)\equiv\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H+\beta\mu N}\right]$ を計算してみよう．まず大分配関数は電子と陽電子の各準位ごとに因子化するので，$q\equiv e^{-\beta\epsilon_0}$, $y\equiv e^{\beta\mu}$ とおくと，

$$Z(\beta,\mu) = \prod_{m=1}^{\infty}(1+yq^{m-\frac{1}{2}})(1+y^{-1}q^{m-\frac{1}{2}}), \tag{A.54}$$

であることがわかる．一方，大分配関数はフェルミオン数 N のセクターの分配関数の和として

$$Z(\beta,\mu) = \sum_{N\in\mathbb{Z}} y^N Z_N(\beta)$$

のように書ける．まず $N=0$ のセクターを考えると，必ず同数の電子と陽電子が励起されており，ハミルトニアンの固有値は $\epsilon_0 M$ $(M\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$と書ける．そしてエネルギー $E=\epsilon_0 M$ を持つ励起状態は，以下のように $k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_r>$

0, $\sum_{i=1}^{r} k_i = M$ となる整数の組 $\{k_i\}$ (M の分割)と 1 対 1 対応があることがわかる.

まず，いつものように $\{k_i\}$ を M 個の箱からなるヤング図形とみなす．図 A.1 に示すように，箱の一辺に矢印を入れ，下から上に矢印の方向にヤング図形を眺める．このとき，エネルギー準位は矢印の方向に ϵ_0 ずつ増加するとし，図に示す正方形(leading diagonal)の頂点が「フェルミ面」を表し，準位の正負の境界を示している．上向きの矢印は占有された準位，右向きの矢印は空いた準位に対応させる．矢印の始点より下の準位はすべて詰まっているとし，矢印の終点より上の準位は全て空いているとする．こうして，おのおののヤング図形に対し，エネルギー $\epsilon_0 M$，フェルミオン数 0 を持つ電子と陽電子(あるいは正孔)のフォック状態を一意的に対応させることができる*5．読者は，簡単なヤング図形に対し，どのようなフォック状態が対応するか，具体的に試してみて欲しい.

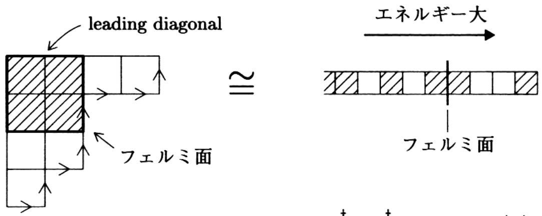
さて，$p(M)$ を M の分割の個数とすると,

$$Z_0(\beta) = \sum_{M=0}^{\infty} p(M) q^M = \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)}$$

が成り立つ．フェルミオン数 N の真空は，たとえば $N \geq 1$ のときは $\frac{1}{2}\epsilon_0$ から $\left(N-\frac{1}{2}\right)\epsilon_0$ までの全ての準位に電子が詰まっていることを意味するので，全体のエネルギーは $\sum_{j=1}^{N} \epsilon_0 \left(j-\frac{1}{2}\right) = \frac{N^2}{2}\epsilon_0$ に等しい($N \leq -1$ のときも同様に陽電子を詰めればよい)．したがって，$E = \epsilon_0 \left(\frac{N^2}{2} + M\right)$ を持つフェルミオン数 N の励起状態は，やはり M の分割と 1 対 1 対応する．よって,

$$Z_N(\beta) = \frac{q^{\frac{N^2}{2}}}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)}$$

*5　この対応は，ヤング図形に対し $SU(N)$ の既約表現が 1 対 1 対応し，その指標公式がシューア関数(本質的にスレーター行列式)で書けるという事実が数学的な背景である．そしてスレーター行列式はフェルミオンの多体系の波動関数であるからフォック表示すればよい．ところで，このように構成されたフェルミオンの状態のエネルギー固有値が $\epsilon_0 M$ (M はヤング図形の箱の数)に等しくなるのを示すのはよい演習問題である.



$$\cong \quad \psi^\dagger_{-\frac{9}{2}}\psi^\dagger_{-\frac{1}{2}}\psi_{-\frac{3}{2}}\psi_{-\frac{5}{2}}|0\rangle$$

$$E=\epsilon_0\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)=9\epsilon_0$$

図 A.1 ヤング図形とフェルミオンのフォック状態の対応例：$\psi^\dagger_{-(n-\frac{1}{2})}$ $(\psi_{-(n-\frac{1}{2})})$ は n 番目の準位の電子(陽電子)の生成演算子を表す.

が成り立つので,

$$Z(\beta,\mu)=\sum_{N\in\mathbb{Z}}\frac{y^N q^{\frac{N^2}{2}}}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)}, \tag{A.55}$$

となる. (A.54)と(A.55)は等しいので, 恒等式(A.53)が証明された.

コメント **ボソン・フェルミオン対応** 上の証明は本質的に 2 次元の場の理論における「ボソン・フェルミオン対応」の共形場理論における実現を意味している. すなわち, 半径 $\sqrt{2\alpha'}$ $\left(\text{または} \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\right)$ の円周にコンパクト化された零質量スカラー場と零質量ディラック・フェルミオンの間の等価性を示している. また M の分割($=M$ 個の箱のヤング図形)とフェルミオン・反フェルミオン系のフォック空間の対応は, 非常に多くの応用を持つ.

学習の手引きと参考文献

本書では重要性を認識しつつもカバーし切れなかったトピックも多い．ここでは，共形場理論を本格的に学びたい，あるいは概要を知りたいといった読者のために，主に文献リストの前半部に「教科書・レビュー」として挙げている文献について学習の手引きを兼ねたコメントをする．これらは本書と併読する，本書の参考書として用いる，また本書を勉強した後により専門的な学習をするなどのためにお勧めする文献である．

後半部では，主要論文と各論へのレビューとして一覧で文献を紹介する．より進んで研究を志す人は一読をお勧めする．

文献リストは完全なものからは程遠いので，その点はご容赦いただきたい．

教科書・参考書・論文選集・レビュー

共形場理論を勉強している読者へ

まず，

[1] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory.* Springer, 2nd printing, 1999.

は，超共形場理論は含んでいないものの，現存する共形場理論についての最も詳細なテキストと言ってよいであろう．相当大部なので辞書的に用いるのがよいと思われる．

[2] C. Itzykson, H. Saleur and J.-B. Zuber (eds.), *Conformal invariance and applications to statistical mechanics.* Teaneck, NJ, World Scientific, 1988.

は共形場理論の初期の重要論文が網羅された論文選集であり，[21] を初めとして本書のレファレンスも相当数掲載されている．教科書やレビューを読んだ方が効率よく学習できる面もあるが，特に研究者を志す学生には，オリジナルの原論文にチャレンジすることをお勧めする．

[3] E. Brézin and J. Zinn-Justin (eds.), *Fields, Strings and Critical Phenomena* (Les Houches 1988 session 49). North-Holland, 1989.

[4] P. Ginsparg, *Applied Conformal Fields Theory.* 'course 1' of [3], [arXiv:hep-th/9108028].

は専門的になり過ぎず，重要なトピックについてバランスよく解説された有名なレビューである．著者の一人(菅原)が修士の学生のときにお世話になった文献でもある．ちなみに，[3] は 1988 年の Les Houches Summer School の講義録であるが，そのなかにその当時の共形場理論，臨界現象，2 次元重力等についての重要な研究のレビューが含まれており，[4] はそのなかの最初の部分である．

[5] J. Cardy, *Conformal Invariance and Statistical Mechanics.* 'course 2' of [3]. [arXiv:0807.3472 [cond-mat.stat-mech]].

も同様に [3] に含まれており，主に統計力学系に共形場理論を応用するという立場で書かれた初学者向けのレビューとなっている．同じように，統計力学系への応用を視野に入れ，共形場理論についても詳しく書かれている教科書として，

[6] 川上則雄，梁成吉，共形場理論と 1 次元量子系(新物理学選書)．岩波書店，1997.

を挙げておく．[6] は可解系の入門的な教科書としても有用で，ベーテ仮説(Bethe ansatz)等の手法に関しても懇切丁寧な解説が載っている．

[7] 伊藤克司，別冊数理科学 共形場理論(2011 年 6 月号)．サイエンス社.

[8] 山田泰彦，共形場理論入門(数理物理シリーズ)．培風館，2006.

[9] R. Blumenhagen and E. Plauschinn, *Introduction to Conformal Field Theory: With Applications to String Theory* (Lecture Notes in Physics). Springer, 2009.

は本書と相補的なテキストであり，ある部分においては本書よりも記述が詳細である．[7] はビラソロ代数とミニマル模型に限定しているおかげで共形場理論のエッセンスを丁寧に解説することに成功しており，[8] は数学的にきっちりと理解したい読者にお勧めする．[9] は，境界状態とそれによる D-ブレーンの記述についての丁寧な解説を含み，特に超弦理論への応用を志向する読者に

お勧めである．ゲプナー模型についても詳しく解説されている．

数理物理学に興味がある読者へ

数理物理学に関心がある本書の読者も多いと考えるが，アフィン・リー代数については，やはりオリジナルの

[10] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras, 3rd ed.* Cambridge University Press, 1994.

にチャレンジするのがよいと考える．物理の学生にとっては最初は敷居が高く感じられるかもしれないが，苦労して勉強すれば得られるものは大きいと考える．

近年，急速な進展を見せている「ムーンシャイン」のトピックについては，なかなか初心者向けのテキストは見当たらないため，直接原論文を勉強してもらうこととなる．モンスター群のムーンシャインと頂点作用素代数の教科書として，かなり専門的ではあるが

[11] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster.* Academic Press, 1989.

が有名なテキストであり，また数少ない日本語で読めるモンスター群の解説書として

[12] 原田耕一郎，モンスター 群のひろがり．岩波書店，1999.

がある．

ヤコビ形式は，共形場理論や弦理論のさまざまなトピックに関連して登場する概念であり，本書でも何度も言及している．まとまった教科書である

[13] M. Eichler and D. Zagier, *The Theory of Jacobi Forms.* (Birkhäuser, 1985 版)，2014.

は有用であろう．

場の量子論のテキスト

本書は既に場の量子論の基礎的なトレーニングを受けている読者を想定しているが，念のために場の量子論の代表的な教科書について触れておく(場の量子論については，たくさんの良書があるので，あくまで一部を挙げているに過

ぎない).

[14] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (3巻セット). Cambridge University Press, 2005. [邦訳：S. ワインバーグ(著)/青山秀明, 有末宏明, 杉山勝之(共訳), ワインバーグ 場の量子論　第1-6巻(物理学叢書). 吉岡書店, 1997-2003].

はおそらくは最も詳細な教科書,

[15] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory* (Frontiers in Physics). Westview Press, 1995.

[16] 九後汰一郎, ゲージ場の量子論I, II(新物理学シリーズ). 培風館, 1989.

は標準的な教科書, そして

[17] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory, 2nd ed.* Wiley, 2010. [邦訳：F. マンドル, G. ショー(著)/樺沢宇紀(訳), 場の量子論　第1, 2巻. 丸善プラネット, 2011].

は入門書である.

また, 共形場理論は場の量子論の一般論の立場からは,「アノマリーのある対称性に対するワード・高橋恒等式をいかに利用するか？」という捉え方もできるかもしれない. その意味で, 本書では「出発点」としたアノマリーの導出について, 経路積分の立場から丁寧に解説している文献

[18] 藤川和男, 経路積分と対称性の量子的破れ(新物理学選書). 岩波書店, 2001.

を挙げておく.

超対称性を持つ場の量子論については, 以前より

[19] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity, 2nd ed.* Princeton, N.J., Princeton University Press, 1992. [邦訳：J. ヴェス, J. バガー(著)/志摩一成(訳), 超対称性と超重力. 丸善出版, 2011].

が「世界標準」の教科書とされている. 2次元では超対称多重項の構造が非常に単純であるが, 超対称性の一般論との対応が知りたい場合など, 必要に応じて参照して欲しい.

主要原論文と各論へのレビュー*

[20] A.M. Polyakov, *JETP. Lett.* **12** (1970), 381.

[21] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B 241** (1984), 333.

[22] B.L. Feigin and D.B. Fuchs, *Funct. Anal. Appl.* **16** (1982), 114; *Funct. Anal. Appl.* **17** (1983), 241.

[23] V.S. Dotsenko and V.A. Fateev, *Nucl. Phys.* **B 240** (1984), 312.

[24] G. Felder, *Nucl. Phys.* **B 317** (1989), 215; *Nucl. Phys.* **B 324** (1989), 548.

[25] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* **B 103** (1981), 207.

[26] H. Dorn and H.J. Otto, *Phys. Lett.* **B 291** (1992), 39 [arXiv:hep-th/9206053]; *Nucl. Phys.* **B 429** (1994), 375 [arXiv:hep-th/9403141].

[27] A.B. Zamolodchikov and Al.B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B 477** (1996), 577 [hep-th/9506136].

[28] N. Seiberg, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **102** (1990), 319.

[29] Y. Nakayama, *Int. J. Mod. Phys.* **A 19** (2004), 2771 [arXiv:hep-th/0402009].

[30] V.G. Kac, *Lect. Notes Phys.* **94** (1979), 441.

[31] D. Friedan, Z. Qiu and S. Shenker, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984), 1575.

[32] A. Rocha-Caridi, In *Vertex Operators in Mathematics and Physics*, J. Lepowsky, M. Mandelstam and I.M. Singer (eds.), *Proc. Conf.* November 10–17 (1983), Springer, New York, 1984.

[33] D.A. Huse, *Phys. Rev.* **B 30** (1984), 3908.

[34] G.E. Andrews, R.J. Baxter, P.J. Forrester, *J. Stat. Phys.* **35** (1984), 193–266.

[35] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **92** (1984), 455.

[36] A.M. Polyakov and P.B. Wiegmann, *Phys. Lett.* **B 131** (1983), 121.

[37] H. Sugawara, *Phys. Rev.* **170** (1968), 1659.

---

* より完全な文献リストとしては，たとえば，[1] の文献リスト等を参照して欲しい．

[38] V.G. Knizhnik and A.B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B 247** (1984), 83.

[39] D. Gepner and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 278** (1986), 493.

[40] F. Gliozzi, J. Scherk and D.I. Olive, *Nucl. Phys.* **B 122** (1977), 253.

[41] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, *Phys. Rept.* **244** (1994), 77 [arXiv:hep-th/9401139].

[42] D. Kutasov and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B 358** (1991), 600.

[43] J.L. Cardy, *Nucl. Phys.* **B 270** (1986), 186.

[44] L.J. Dixon, J.A. Harvey, C. Vafa and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 261** (1985), 678; *Nucl. Phys.* **B 274** (1986), 285.

[45] K.S. Narain, *Phys. Lett.* **B 169** (1986), 41.

[46] K.S. Narain, M.H. Sarmadi and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 279** (1987), 369.

[47] E. Witten, arXiv:0706.3359 [hep-th].

[48] A. Sen, *Int. J. Mod. Phys.* **A 9** (1994), 3707 [arXiv:hep-th/9402002].

[49] G.W. Moore and N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B 212** (1988), 451.

[50] G.W. Moore and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B 313** (1989), 16.

[51] G.W. Moore and N. Seiberg, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989), 177.

[52] D. Friedan and S.H. Shenker, *Nucl. Phys.* **B 281** (1987), 509.

[53] A. Cappelli, C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Commun. Math. Phys.* **113** (1987), 1.

[54] A. Kato, *Mod. Phys. Lett.* **A 2** (1987), 111.

[55] E.P. Verlinde, *Nucl. Phys.* **B 300** (1988), 360.

[56] N. Ishibashi, *Mod. Phys. Lett.* **A 4** (1989), 251.

[57] J.L. Cardy, *Nucl. Phys.* **B 324** (1989), 581.

[58] P. Goddard, A. Kent and D. Olive, *Commun. Math. Phys.* **103** (1986), 105.

[59] F. Ravanini, *Mod. Phys. Lett.* **A 3** (1988), 397.

[60] V.A. Fateev and A.B. Zamolodchikov, *Sov. Phys. JETP* **62** (1985), 215; *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **89** (1985), 380.

[61] V.A. Fateev and A.B. Zamolodchikov, *Theor. Math. Phys.* **71** (1987), 451; *Teor. Mat. Fiz.* **71** (1987), 163.

[62] D. Gepner and Z. Qiu, *Nucl. Phys.* **B 285** (1987), 423.

[63] D. Gepner, *Phys. Lett.* **B 222** (1989), 207.

[64] Y. Kazama and H. Suzuki, *Phys. Lett.* **B 216** (1989), 112; *Nucl. Phys.* **B 321** (1989), 232.

[65] S. Hosono and A. Tsuchiya, *Commun. Math. Phys.* **136** (1991), 451.

[66] D. Karabali and H.J. Schnitzer, *Nucl. Phys.* **B 329** (1990), 649.

[67] K. Gawedzki and A. Kupiainen, *Nucl. Phys.* **B 320** (1989), 625.

[68] A. Cappelli, *Phys. Lett.* **B 185** (1987), 82.

[69] W. Lerche, C. Vafa and N.P. Warner, *Nucl. Phys.* **B 324** (1989), 427.

[70] W. Boucher, D. Friedan and A. Kent, *Phys. Lett.* **B 172** (1986), 316.

[71] L.J. Dixon, M.E. Peskin and J. Lykken, *Nucl. Phys.* **B 325** (1989), 329.

[72] V.K. Dobrev, *Phys. Lett.* **B 186** (1987), 43.

[73] E. Kiritsis, *Int. J. Mod. Phys.* **A 3** (1988), 1871.

[74] F. Ravanini and S.K. Yang, *Phys. Lett.* **B 195** (1987), 202.

[75] C. Vafa and N.P. Warner, *Phys. Lett.* **B 218** (1989), 51.

[76] D. Gepner, *Phys. Lett.* **B 199** (1987), 380; *Nucl. Phys.* **B 296** (1988), 757.

[77] T. Eguchi, H. Ooguri, A. Taormina and S.K. Yang, *Nucl. Phys.* **B 315** (1989), 193.

[78] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 403** (1993), 159 [arXiv:hep-th/9301042].

[79] B. Greene, [arXiv:hep-th/9702155].

[80] E. Witten, *Mirror manifolds and topological field theory*, In Yau, S.T. (ed.), Mirror symmetry I, 121–160 [arXiv:hep-th/9112056].

[81] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **109** (1987), 525.

[82] T. Kawai, Y. Yamada and S.K. Yang, *Nucl. Phys.* **B 414** (1994), 191 [arXiv:hep-th/9306096].

[83] E. Witten, *Int. J. Mod. Phys.* **A 9** (1994), 4783 [arXiv:hep-th/

9304026].

[84] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **117** (1988), 353.

[85] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **118** (1988), 411.

[86] T. Eguchi, S.K. Yang, *Mod. Phys. Lett.* **A 5** (1990), 1693–1701.

[87] T. Eguchi and A. Taormina, *Phys. Lett.* **B 200** (1988), 315.

[88] T. Eguchi and A. Taormina, *Phys. Lett.* **B 210** (1988), 125.

[89] K. Miki, *Int. J. Mod. Phys.* **A 5** (1990), 1293.

[90] S. Odake, *Mod. Phys. Lett.* **A 4** (1989), 557; *Int. J. Mod. Phys.* **A 5** (1990), 897.

[91] T. Eguchi and Y. Sugawara, *JHEP* **0401** (2004), 025 [arXiv:hep-th/0311141].

[92] S. Zwegers, PhD thesis, *Mock Theta functions.* Utrecht University, 2002.

[93] T. Eguchi and K. Hikami, *J. Phys.* **A 42** (2009), 304010 [arXiv: 0812.1151 [math-ph]].

[94] T. Eguchi and Y. Sugawara, *JHEP* **1411** (2014), 156 [arXiv:1407.7721 [hep-th]].

[95] J. Troost, *JHEP* **1006** (2010), 104 [arXiv:1004.3649 [hep-th]].

[96] T. Eguchi and Y. Sugawara, *JHEP* **1103** (2011), 107 [arXiv:1012.5721 [hep-th]].

[97] T. Eguchi, H. Ooguri and Y. Tachikawa, *Exper. Math.* **20** (2011), 91 [arXiv:1004.0956 [hep-th]].

[98] T. Eguchi and K. Hikami, *Phys. Lett.* **B 694** (2011), 446 [arXiv: 1008.4924 [hep-th]].

[99] T. Gannon, arXiv:1211.5531 [math.RT].

[100] M.C.N. Cheng, J.F.R. Duncan and J.A. Harvey, *Commun. Num. Theor. Phys.* **08** (2014), 101 [arXiv:1204.2779 [math.RT]].

索　引

英数字

あ 行

か 行

さ 行

た 行

な 行

は 行

江口 徹
1948年生まれ.
1972年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了.
現在は，立教大学大学院理学研究科特任教授，東京大学名誉教授，京都大学名誉教授.
専門 素粒子論，超弦理論

菅原祐二
1967年生まれ.
1994年 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了.
現在は，立命館大学理工学部教授.
専門 素粒子論，超弦理論

共形場理論

2015年9月17日 第1刷発行

著 者 江口 徹（えぐち とおる） 菅原祐二（すがわら ゆうじ）

発行者 岡本 厚

発行所 株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋2-5-5
電話案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・法令印刷 カバー・半七印刷 製本・牧製本

ISBN 978-4-00-005249-8 Printed in Japan